日本大学・医学部

試験日　2023 年 2 月 1 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （1）　$U=\{x \mid 1 \leqq x \leqq 9,\ x$ は整数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A, B について，
$\overline{A} \cap \overline{B}=\{1, 4, 7, 9\}$，$\overline{\overline{A} \cup B}=\{5, 8\}$ であるとき，B の要素のうち最大の数は $\boxed{1}$ である．

（2）　方程式 $x^2-|x|-6=0$ の解は $x=\boxed{2}\,\boxed{3},\ \boxed{4}$ である．

（3）　方程式 $2x+11y=5$ を満たす整数 x, y のうち，$100<x+y<500$ を満たす組は $\boxed{5}\,\boxed{6}$ 組ある．

（4）　点 $(3, 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する直線のうち，傾きが正であるものの方程式は $y=\boxed{7}\,x-\boxed{8}$ である．

（5）　$2^x=4^y=5^z=10$ のとき，$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\boxed{9}\,\boxed{10}$ である．

2 複素数 z は $z+\overline{z}=-4,\ |z+6|=2\sqrt{7}$ を満たすとする．ただし，$\overline{z}$ は z の共役な複素数である．

（1）　i を虚数単位とする．$z=\boxed{11}\,\boxed{12} \pm \boxed{13}\sqrt{\boxed{14}}\,i$ である．

（2）　z^n が実数になるような最小の自然数 n の値は $\boxed{15}$ であり，そのときの z^n の値は $\boxed{16}\,\boxed{17}$ である．

3 2 つの箱 A，B があり，A には赤球 3 個，白球 5 個，B には赤球 4 個，白球 5 個が入っている．まず，A または B の箱を選び，選んだ箱から球を 2 個取り出す．ただし，A，B の箱を選ぶ事象は同様に確からしいとし，また，1 個の球を取り出す事象はどれも同様に確からしいとする．

（1）　取り出された球が 2 個とも赤球である確率は $\dfrac{\boxed{18}\,\boxed{19}}{\boxed{20}\,\boxed{21}\,\boxed{22}}$ である．

（2）　取り出された球が 2 個とも赤球であるとき，それらが A の箱から取り出された球である条件付き確率は，$\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}\,\boxed{25}}$ である．

4 平行六面体 OABC − DEFG において，辺 OC の中点を H，辺 DG を 3 : 1 に内分する点を I，辺 EF と平面 AHI の交点を J，対角線 OF と平面 ADH および AHI の交点をそれぞれ P, Q とする．

（1）　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OF}}=\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$ である．

（2）　△AEJ および平行四辺形 ABFE の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である．

（3）　OP : PQ : QF を最も簡単な整数比で表すと，$\boxed{30} : \boxed{31} : \boxed{32}\,\boxed{33}$ である．

5 n を自然数とする．$a_n=\tan^n \dfrac{\theta}{2}\ (-\pi<\theta<\pi)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

（1）　$\theta=-\dfrac{\pi}{12}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\boxed{34}$ である．

（2）　$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{35}}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\boxed{36}$ である．

（3）　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\dfrac{\sqrt{\boxed{37}}+\boxed{38}}{\boxed{39}}$ であり，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\dfrac{\sqrt{\boxed{40}}-\boxed{41}}{\boxed{42}}$ である．

6 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t(t-1)(t-x)\,dt$ とする．

（1）　$f(x)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}\,\boxed{45}}$ であり，$f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{46}}{\boxed{47}}$ である．

（2）　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分を D とすると，D の面積は $\dfrac{\boxed{48}}{\boxed{49}\,\boxed{50}}$ であり，D を x 軸のまわ

りに1回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}\boxed{53}\boxed{54}}\pi$ である．

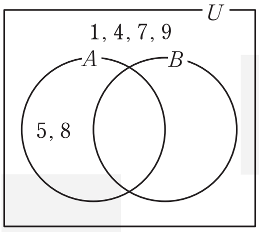
1　（1） 数学Ⅰ【集合の雑題】基 本

▶解答◀　$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

のうちの

$$\{5,8\}=\overline{\overline{A}\cup B}=A\cap\overline{B}$$

は にあり，$\{1,4,7,9\}=\overline{A}\cap\overline{B}$ は にある．残りの2，3，6は B にある．B の要素のうち最大の数は **6**



（2） 数学Ⅰ【2次方程式】基 本

▶解答◀　$x^2-|x|-6=0$ ……………………………①

$x^2=|x|^2$ であるから，① は

$$|x|^2-|x|-6=0$$

$$(|x|-3)(|x|+2)=0$$

となる．$|x|\geqq 0$ より

$$|x|=3 \qquad \therefore\quad x=\pm\mathbf{3}$$

◆別解◆　$x\geqq 0$ のとき，① は

$$x^2-x-6=0$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

となるから，$x\geqq 0$ より $x=3$

$x\leqq 0$ のとき，① は

$$x^2-(-x)-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

となるから，$x\leqq 0$ より $x=-3$

したがって，$x=\mathbf{-3,\ 3}$

（3） 数学A【不定方程式】標 準

▶解答◀　$x=\dfrac{5-11y}{2}=2-5y-\dfrac{y-1}{2}$

が整数であるから $\dfrac{y-1}{2}=k$ とおける．k は整数である．$y=2k+1$ であるから

$$x=2-5(2k+1)-k=-11k-3$$

$100<x+y<500$ に代入し

$$100<-9k-2<500$$

$$-502<9k<-102$$

$$-\frac{502}{9}<k<-\frac{34}{3}$$

$$-55.\cdots<k<-11.\cdots$$

$$-55\leqq k\leqq -12$$

k は $-12+55+1=44$ 個ある．(x,y) は **44** 個ある．

◆別解◆　$2x+11y=5$ ……………………………①

$2\cdot 8+11\cdot(-1)=5$ ……………………………②

①－② より

$$2(x-8)+11(y+1)=0$$

2と11は互いに素であるから，k を整数として

$$x-8=11k$$

とおけて，このとき $y=-2k-1$ となる．以下省略．

（4） 数学Ⅱ【円と直線】標 準

▶解答◀　直線 $x=3$ は円 $x^2+y^2=5$ の接線ではないから，求める接線の方程式は傾きを $m\ (>0)$ として $y=m(x-3)+1$ と表せる．

これが円に接するのは，円の中心 $(0,0)$ と直線の距離が，円の半径 $\sqrt{5}$ と等しくなるときであるから

$$\frac{|m\cdot 0-0-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|-3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

$$(-3m+1)^2=5(m^2+1)$$

$$4m^2-6m-4=0$$

$$(2m+1)(m-2)=0$$

$m>0$ より $m=2$ となり，求める接線の方程式は

$$y=2(x-3)+1$$

$$\boldsymbol{y=2x-5}$$

（5） 数学Ⅱ【対数の計算】基 本

▶解答◀　$2^x=10,\ 4^y=10,\ 5^z=10$ より

$$2=10^{\frac{1}{x}},\ 4=10^{\frac{1}{y}},\ 5=10^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{2}{4\cdot 5}=10^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$$

$$10^{-1}=10^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-1}$$

2　数学Ⅲ【ド・モアブルの定理】標 準

▶解答◀　$z=x+yi$ (x, y は実数) とおく．

（1）　$z+\overline{z}=-4,\ |z+6|=2\sqrt{7}$ より $2x=-4$ で，

$$(x+6)^2+y^2=28$$

$x=-2,\ y^2=12$ となり $y=\pm 2\sqrt{3}$.

$$z=\mathbf{-2\pm 2\sqrt{3}}\boldsymbol{i}$$

（2）　$z=4\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\theta=\pm\dfrac{2\pi}{3}$ として $z=4(\cos\theta+i\sin\theta)$

ド・モアブルの定理より

$$z^n=4^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

となる．これが実数になる n は $n\theta=\pm\dfrac{2n\pi}{3}$ が π の整数倍になるもので，最小の n は $\mathbf{3}$ である．このとき

$$z^3=4^3(\cos 2\pi)=\mathbf{64}$$

3

数学A【条件付き確率】**基本**

▶解答◀　（1）　A の箱を選んで赤球を 2 個取り出すという事象を A とする．

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 2}{8\cdot 7}=\frac{3}{56}$$

また，B の箱を選んで赤球を 2 個取り出す確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{9\cdot 8}=\frac{1}{12}$$

である．赤球を 2 個取り出す事象を R とする．

$$P(R)=\frac{3}{56}+\frac{1}{12}=\frac{3\cdot 3+14}{168}=\mathbf{\frac{23}{168}}$$

（2）　求める条件付き確率は

$$P_R(A)=\frac{P(A)}{P(R)}=\frac{\frac{3}{56}}{\frac{23}{168}}=\mathbf{\frac{9}{23}}$$

4

数学B【ベクトルと図形（空間)】**標準**

▶解答◀　（1）　P は OF 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OF}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}\ \cdots\cdots①$$

と表せる．H は辺 OC の中点であるから $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2s\overrightarrow{\mathrm{OH}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

であり，さらに P が平面 ADH 上にあるから

$$s+2s+s=1\qquad\therefore\quad s=\frac{1}{4}$$

である．したがって，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OF}}=s=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

図 1

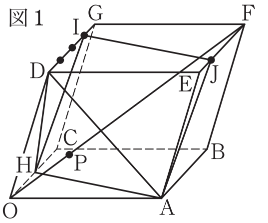
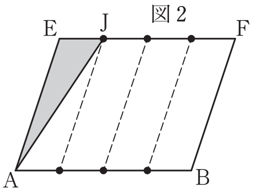


図 2



（2）　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

J は平面 AHI 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OH}}+z\overrightarrow{\mathrm{OI}}$, $x+y+z=1$ とおけて

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+z\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$$

$$=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{y}{2}+\frac{3}{4}z\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+z\overrightarrow{\mathrm{OD}}\ \cdots\cdots②$$

また，J は EF 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=(1-w)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+w\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

$$=(1-w)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})+w(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+w\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}\ \cdots\cdots③$$

とおける．②, ③ の係数を比べ

$$x=1,\ \frac{y}{2}+\frac{3}{4}z=w,\ z=1$$

$x+y+z=1$ もあわせて $y=-1$

$$w=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{EJ}:\mathrm{JF}=w:(1-w)=1:3$$

図 2 を見よ．$\dfrac{S_1}{S_2}=\mathbf{\dfrac{1}{8}}$ である．

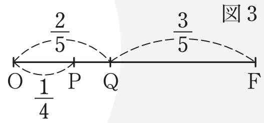
（3）　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ も ①, ② の形に表され

$$x=s,\ \frac{y}{2}+\frac{3}{4}z=s,\ z=s$$

よって $y=\dfrac{1}{2}s$ で，$x+y+z=1$ に代入すると $\dfrac{5}{2}s=1$

$s=\dfrac{2}{5}$ で $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

図 3



$$\mathrm{OP}:\mathrm{PQ}:\mathrm{QF}=\frac{1}{4}:\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{5}=\mathbf{5:3:12}$$

5

数学III【無限等比級数】**標準**

▶解答◀　（1）　$r=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおく．

$\theta=-\dfrac{\pi}{12}$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{\pi}{24}<\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$|r|<1$, $a_n=r^n$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{0}$

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が収束する条件は $-1<r\leqq 1$ である．

$-1<r<1$ のときは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．

$r=1$ のときは $a_n=1$ であるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束しない．

よって，本問では $r=1$ であり，$\tan\dfrac{\theta}{2}=1$ で $\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに $\theta=\mathbf{\dfrac{\pi}{2}}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{1}$

（3）　$-1<r<1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=r\cdot\frac{1}{1-r}=L$ とおく．

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $r=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$L=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$r = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

$$L = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

6

数学Ⅲ【体積】**標準**

▶解答◀　（1）

$$f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-x)\,dt$$

$$= \int_0^x \{t^2(t-1) - t(t-1)x\}\,dt$$

$$= \int_0^x t^2(t-1)\,dt - x\int_0^x t(t-1)\,dt$$

であるから

$$f'(x) = x^2(x-1)$$

$$-\left\{1 \cdot \int_0^x t(t-1)\,dt + x \cdot x(x-1)\right\}$$

$$= -\int_0^x t(t-1)\,dt$$

$$f''(x) = -x(x-1) = -x^2 + x$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

である．よって，$f''(x)$ の最大値は

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

である．また

$$f'(x) = -\int_0^x t(t-1)\,dt = -\int_0^x (t^2 - t)\,dt$$

$$= -\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$= -\frac{1}{6}x^2(2x-3)$$

であるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗		↘

ここで，$f'(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$ より

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + C\ (C\text{ は積分定数})$$

であり，$f(0) = 0$ より $C = 0$ であるから

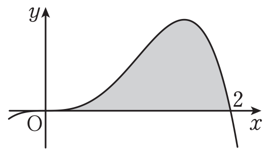
$$f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

となる．したがって，$f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3^4}{2^6 \cdot 3} + \frac{3^3}{2^4 \cdot 3} = \frac{-3^3 + 2^2 \cdot 3^2}{2^6}$$

$$= \frac{-27+36}{64} = \boldsymbol{\frac{9}{64}}$$

（2）　$f(x) = -\dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{6}x^3 = -\dfrac{1}{12}x^3(x-2)$ より，D は図の網目部分である．



よって，D の面積を S とおくと

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{24}x^4\right]_0^2 = -\frac{8}{15} + \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{15}}$$

また，D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とおくと

$$V = \int_0^2 \pi\{f(x)\}^2\,dx = \frac{\pi}{144}\int_0^2 x^6(x-2)^2\,dx$$

$$= \frac{\pi}{144}\int_0^2 (x^8 - 4x^7 + 4x^6)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{144}\left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{4}{7}x^7\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{144} \cdot 2^7\left(\frac{4}{9} - 1 + \frac{4}{7}\right)$$

$$= \frac{8}{9}\pi \cdot \frac{28-63+36}{63} = \boldsymbol{\frac{8}{567}\pi}$$

◆別解◆　$f(x)$ を直接計算すると次のようになる．

$$f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-x)\,dt$$

$$= \int_0^x \{t^3 - (x+1)t^2 + xt\}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{x+1}{3}t^3 + \frac{x}{2}t^2\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(x^4 + x^3) + \frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

要の分析　前年度と同様の構成である．標準的な問題であるが，時間に対して量が多い．速く，正確な計算力が要求されている．また，無限等比級数が前年度に続いて大問で出題された．

（SM，渡邉，都賀，坂本賀，前田拓，安田亨）