日本大学・医学部（二次試験）

試験日　2023 年 2 月 11 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1　以下の問いに答えなさい．

（１）　方程式 $x^3+2x^2+3x+2=4x+4$ の解を求めなさい．

（２）　自然数 n が 4 の倍数でないならば，$f(n)=n^3+2n^2+3n+2$ は 4 の倍数であることを示しなさい．

2　a を $0<a<8$ を満たす定数とし，放物線 $P: y=ax^2-ax+2$ および双曲線 $H: y=\dfrac{4}{x}+2a$ を考える．このとき，以下の問いに答えなさい．

（１）　この放物線と双曲線は 1 点で交わるが，その交点の x 座標は a に依存しない．その交点の座標を求めなさい．

（１）で求めた交点を N とし，N における曲線 P の接線を l，N における曲線 H の接線を m とする．

（２）　l と m が垂直に交わるときの a の値を求めなさい．

（３）　直線 l, m および x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ で表すとき，$S(a)$ を a の式で表し，$S(a)$ の最小値を求めなさい．

3　原点 O の座標平面上に，曲線 $H: \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$，（ただし，$x \geqq 2$）がある．$H$ 上の点 P を $\mathrm{P}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標表示して，P と $\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ を満たす点 Q を H 上に取れる場合を考える．以下の問いに答えなさい．

（１）　Q が H 上に取れるための P の x 座標の取り得る値の範囲を求めなさい．

（２）　x が（１）で求めた範囲にあるとき，$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ は一定の値をとることを示し，その値を求めなさい．

（３）　x が（１）で求めた範囲にあるとき，PQ の最小値を求めなさい．

1

数学A【剰余による分類】基本

▶解答◀　（１）

$$x^3+2x^2+3x+2=4x+4$$
$$x^3+2x^2+3x+2-(4x+4)=0$$
$$x^3+2x^2-x-2=0$$
$$(x-1)(x^2+3x+2)=0$$
$$(x-1)(x+1)(x+2)=0$$
$$\boldsymbol{x=1,\ -1,\ -2}$$

（２）　$f(n)=n^3+2n^2+3n+2-(4n+4)+(4n+4)$
$$=(n-1)(n+1)(n+2)+4(n+1)$$

$n-1, n, n+1, n+2$ は連続する 4 つの整数であるから，この中に 4 の倍数が 1 つあるが，それは n ではない．

よって $n-1, n+1, n+2$ の中に 4 の倍数があり $(n-1)(n+1)(n+2)$ は 4 の倍数であるから $f(n)$ は 4 の倍数である．

◆別解◆　以下 mod 4 とする．n が 4 の倍数でないならば $n\equiv 1, -1, 2$ のいずれかである．

$n\equiv 1$ のとき，$f(n)\equiv 1+2+3+2=8\equiv 0$

$n\equiv -1$ のとき，$f(n)\equiv -1+2-3+2\equiv 0$

$n\equiv 2$ のとき，$f(n)\equiv 8+8+6+2\equiv 0$

よって，いずれの場合も $f(n)$ は 4 の倍数である．

2

数学Ⅲ【最大値・最小値】標準

▶解答◀　（１）　$f(x)=ax^2-ax+2$，$g(x)=\dfrac{4}{x}+2a$ とおく．

$$f(x)=g(x)$$
$$ax^2-ax+2=\frac{4}{x}+2a$$
$$ax^3-ax^2+2(1-a)x-4=0$$
$$(x-2)(ax^2+ax+2)=0$$
$$(x-2)\{ax(x+1)+2\}=0$$

が a の値によらず成り立つ条件は $x=2$ である．

$ax(x+1)+2=0$ は a の値によらず成り立つわけではない．

$$f(2)=g(2)=2a+2$$

よって，N の座標は $\boldsymbol{(2,\ 2a+2)}$

（２）　$f'(x)=2ax-a$，$g'(x)=-\dfrac{4}{x^2}$ より，l の傾きは $f'(2)=3a$，m の傾きは $g'(2)=-1$ である．

よって，l と m が垂直に交わるとき

$$f'(2)\cdot g'(2)=-1$$
$$3a\cdot(-1)=-1 \qquad \therefore\quad a=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

であり，これは $0<a<8$ を満たす．

（３）　l の方程式は

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y=3a(x-2)+(2a+2)$$
$$y=3ax-4a+2$$

であり，x 軸との交点の x 座標は

$$3ax-4a+2=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{4a-2}{3a}$$

m の方程式は

$$y=g'(2)(x-2)+g(2)$$
$$y=-(x-2)+(2a+2)$$
$$y=-x+2a+4$$

であり，x 軸との交点の x 座標は

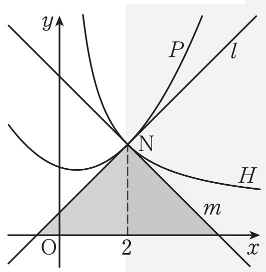
$$-x+2a+4=0 \qquad \therefore \quad x=2a+4$$

$0<a<8$ より

$$(2a+4)-\frac{4a-2}{3a}=\frac{6a^2+8a+2}{3a}>0$$

であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6a^2+8a+2}{3a}\cdot(2a+2)$$
$$=\frac{2(3a^2+4a+1)(a+1)}{3a}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2(a+1)^2(3a+1)}{3a}}$$



$S'(a)=\dfrac{2}{3a^2}h(a)$ の形となり

$$h(a)=\{2(a+1)(3a+1)+(a+1)^2\cdot 3\}\cdot a$$
$$\qquad -(a+1)^2(3a+1)\cdot 1$$
$$=(a+1)\{2a(3a+1)+3a(a+1)$$
$$\qquad -(a+1)(3a+1)\}$$
$$=(a+1)(6a^2+a-1)$$
$$=(a+1)(2a+1)(3a-1)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	8
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

したがって，$S(a)$ の最小値は

$$S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{16}{9}\cdot 2}{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{64}{9}}$$

3 数学Ⅲ【極座標と極方程式】標準

▶解答◀ （1） $P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ を $9x^2-4y^2=36$ に代入し

$$r^2(9\cos^2\theta-4\sin^2\theta)=36$$
$$r^2\{9\cos^2\theta-4(1-\cos^2\theta)\}=36$$
$$r^2(13\cos^2\theta-4)=36$$

P が存在する条件はこのような $r^2>0$ が存在することで $13\cos^2\theta>4$ ………………………………①

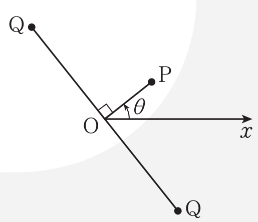
一方，P に対し，OP ⊥ OQ であるような Q が存在する条件は（OQ の偏角は OP の偏角 θ に対し $\theta\pm\frac{\pi}{2}$ となるから）

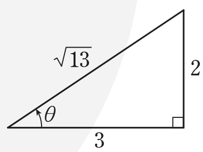
$$13\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)>4$$
$$13\sin^2\theta>4$$
$$|\sin\theta|>\frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \therefore \quad |\tan\theta|>\frac{2}{3}$$

になることであり，このとき $\dfrac{y^2}{x^2}>\dfrac{4}{9}$ より $9y^2>4x^2$ である．ここに $y^2=\dfrac{9}{4}x^2-9$ を代入し

$$\frac{81}{4}x^2-81>4x^2$$
$$\frac{65}{4}x^2>81$$

$x\geqq 2$ であるから $\boldsymbol{x>\dfrac{18}{\sqrt{65}}}$





（2） $13\cos^2\theta-4=\dfrac{36}{OP^2}$，$13\sin^2\theta-4=\dfrac{36}{OQ^2}$ を辺ごとに加えて 36 で割り

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{13-8}{36}=\boldsymbol{\frac{5}{36}} \quad \text{………②}$$

（3） $\angle POQ=90^\circ$ であるから

$$OP^2+OQ^2=PQ^2$$

であり ② より

$$\frac{PQ^2}{OP^2\cdot OQ^2}=\frac{5}{36} \quad \text{………③}$$

一方，相加・相乗平均の不等式より

$$\frac{5}{36}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{OP^2}\cdot\frac{1}{OQ^2}}=\frac{2}{OP\cdot OQ}$$

$$OP\cdot OQ\geqq\frac{72}{5} \quad \text{………④}$$

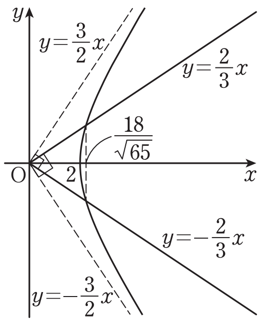
③，④ より

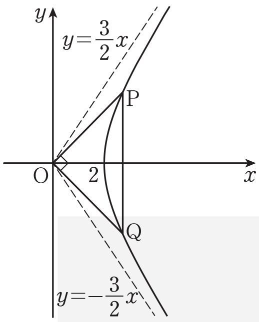
$$PQ=\frac{\sqrt{5}}{6}\cdot OP\cdot OQ\geqq\frac{\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{72}{5}=\boldsymbol{\frac{12}{5}\sqrt{5}}$$

等号は $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ のときに成り立つ．

そのとき $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で，① を満たす．

♦別解♦（**1**）図で漸近線 $y=\pm\dfrac{3}{2}x$ に直交する直線 $y=\mp\dfrac{2}{3}x$（複号同順）と H の交点を考え，$\boldsymbol{x>\dfrac{18}{\sqrt{65}}}$





注意 この形での OP, OQ を考える問は，楕円では 1990 年の東大など多くの例があるが双曲線では初出である．

要の分析 易しい **1**，ほどほどに解ける **2**，新傾向の **3**，というセットで，よく工夫された問題である．

（SM，渡邉，都賀，坂本賀，前田拓，安田亨）