藤田医科大学・前期

試験日　2023 年 1 月 19 日　時間 100 分　数学I 数学II 数学III 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （1） $U=\{x \mid x$ は 2 以上 28 以下の自然数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A=\{x \mid x$ は偶数$\}$，$B=\{x \mid x$ は 3 で割ると 1 余る$\}$，$C=\{x \mid x$ と 2023 は 1 以外に正の公約数を持たない$\}$ について，次の集合の要素の個数を求めよ．ただし，$n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す．

$n(A\cap B)=\square$，$n(\overline{A}\cap B)=\square$，$n(\overline{A}\cap\overline{B})=\square$，$n(\overline{A\cup B})=\square$，

$n(A\cap B\cap C)=\square$，$n(A\cap B\cap\overline{C})=\square$，$n(\overline{A\cup B\cup C})=\square$

（2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-x\sqrt{x^2-5})=\frac{\square}{\square}$ である．

（3） 曲線 $y=2x\sqrt{x}\left(0\leqq x\leqq\dfrac{5}{3}\right)$ の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（4） $(1+i)^n=(1-i)^n$ をみたす 2023 以下の正の整数 n は $\square$ 個ある．ただし，i は虚数単位である．

（5） 関数 $f(x)=\log|\tan 4x|$ の $x=\dfrac{\pi}{48}$ における微分係数は $\square$ である．

（6） $\alpha=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ のとき，$\alpha^5-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha=\square$ である．

（7） $f(x)=\dfrac{\sin^3 3x}{\sin^3 3x+\cos^3 3x}$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\square$ であるから，

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{\square}$ である．

（8） 3 個のサイコロを同時に振るとき，出た目の和が 8 以下になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$，出た目の積が 12 以下になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（9） x を実数とする．命題「$x^2-9x+20<0 \Longrightarrow x^2-2(k-1)x+k^2-2k-8\leqq 0$」が真となる k の範囲は $\square\leqq k\leqq\square$ ある．

（10） 数列 $\{a_k\}$ が $k\geqq 1$ で $a_k>0$, a_k の第 1 項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{n^3}{a_n}\right)$ であるとき，

$S_5=\square$, $S_{20}=\square$ である．

2 実数 x の区間 $a\leqq x\leqq b$（ただし $0<a<b$）で正の値をとる微分可能な関数 $f(x)$ に対して，微分可能な逆関数 $g(x)$ が存在するとき，定積分 S_1, S_2 を次式で定義する．

$$S_1=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$S_2=\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx$$

次の問いに答えよ．

（1） S_1+S_2 を a, b, $f(a)$, $f(b)$ で表せ．

（2） 定積分 $\displaystyle\int_3^{99}\sqrt{\sqrt{1+x}-1}\,dx$ を求めよ．

（3） 定積分 $\displaystyle\int_1^3\sqrt{\frac{4}{x}-1}\,dx$ を求めよ．

3 xy 平面上の点 $(p,\,q)$ について，$p,\,q$ がともに整数のときこの点を格子点と呼ぶ．また e を自然対数の底とするとき，$p-e$ または $p+e$ のどちらかと，$q+\dfrac{1}{2}$ がともに整数のとき，この点を e 点と呼ぶことにする．例えば，$(p,\,q)=\left(1-e,\,\dfrac{3}{2}\right)$ は e 点である．

次の問いに答えよ．ただし，素数の平方根と e が無理数であり，

$2.7 < e < 2.8$ であることは証明なしに用いてよい．

（1） 2 つの格子点を結ぶ任意の線分は e 点を通らないことを示せ．

（2） 4 つの格子点を頂点とし，1 辺の長さが 1 の任意の正方形の内部にある e 点の個数を求めよ．

（3） 3 つの格子点を頂点とし，1 辺が x 軸に平行，1 辺が y 軸に平行な任意の直角三角形の面積は，この三角形の内部にある e 点の個数の $\frac{1}{2}$ に等しいことを示せ．

（4） 3 つの格子点を頂点とする任意の三角形の面積は，この三角形の内部にある e 点の個数の $\frac{1}{2}$ に等しいことを示せ．

（5） 3 つの格子点を頂点とする正三角形は存在しないことを示せ．

1

（1） 数学Ⅰ【集合の雑題】標 準

▶解答◀　$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots,\ 2\cdot14\}$，
$B=\{3\cdot1+1,\ 3\cdot2+1,\ \cdots,\ 3\cdot9+1\}$ である．

$2023=7\cdot17^2$ であるから

$$\overline{C}=\{7,\ 14,\ 17,\ 21,\ 28\}$$

である．

$$A\cap B=\{4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28\}$$

より $n(A\cap B)=\mathbf{5}$ である．

$\overline{A}$ は 2〜28 の奇数の集合であるから

$$\overline{A}\cap B=\{7,\ 13,\ 19,\ 25\}$$

より $n(\overline{A}\cap B)=\mathbf{4}$ である．

$\overline{B}$ は 2〜28 の中で，3 で割り切れるか 2 余る集合であるから

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 15,\ 17,\ 21,\ 23,\ 27\}$$

より $n(\overline{A}\cap\overline{B})=\mathbf{9}$ である．

$n(\overline{A\cup B})=n(\overline{A}\cap\overline{B})=\mathbf{9}$ である．

$A\cap B$ で C の要素であるものを考えて

$$A\cap B\cap C=\{4,\ 10,\ 16,\ 22\}$$

より $n(A\cap B\cap C)=\mathbf{4}$ である．

$$A\cap B\cap\overline{C}=\{28\}$$

より $n(A\cap B\cap\overline{C})=\mathbf{1}$ である．

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{17,\ 21\}$$

より $n(\overline{A\cup B\cup C})=\mathbf{2}$ である．

注 意 【計算で見る】

以下文字は正の整数である．$A\cap B$ の要素を x とすると

$$x=2m=3n+1$$

とおける．

$$m=\frac{3n+1}{2}=n+\frac{n+1}{2}$$

$\frac{n+1}{2}=k$ とおけて，$n=2k-1$ であるから

$$m=(2k-1)+k=3k-1$$

$$x=2m=6k-2$$

これより $A\cap B$ の要素は 4 から 6 ずつ増えることが分かる．$\overline{A}\cap\overline{B}$ についても同様である．

（2） 数学Ⅲ【関数の極限】基 本

▶解答◀　$y=x^2-x\sqrt{x^2-5}$ とおく．

$$y=x(x-\sqrt{x^2-5})=x\cdot\frac{5}{x+\sqrt{x^2-5}}$$

$x>0$ のとき $y=\dfrac{5}{1+\sqrt{1-\dfrac{5}{x^2}}}$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\frac{5}{1+1}=\mathbf{\frac{5}{2}}$ である．

注 意　$x>0$ のとき，$y=x^2-\sqrt{x^4-5x^2}$

x が大きな値のとき，

$$x^4-5x^2=\left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\fallingdotseq\left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$y\fallingdotseq x^2-\left(x^2-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

（3） 数学Ⅲ【曲線の長さ】標 準

▶解答◀　$y=2x^{\frac{3}{2}}$ のとき $y'=3x^{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+9x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{5}{3}}=\frac{2}{27}\cdot(64-1)=\mathbf{\frac{14}{3}}$$

（4） 数学Ⅲ【ド・モアブルの定理】標 準

▶解答◀　$(1+i)^n=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n$

$$=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(1-i)^n=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}^n$$

$$=(\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$(1+i)^n=(1-i)^n$ のとき

$$2(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=0$$

k を整数として，$n=4k$ であるから，$1\leqq n\leqq2023$ のとき $\frac{1}{4}\leqq k\leqq\frac{2023}{4}=505.75$ より，これを満たす整数 k は 1〜505 であるから，n は **505** 個ある．

注意 【2 乗してみれば】

$(1+i)^1=1+i\neq(1-i)^1=1-i$

$(1+i)^2=2i\neq(1-i)^2=-2i$

$(1+i)^3=2i(1+i)\neq(1-i)^3=-2i(1-i)$

$(1+i)^4=-4=(1-i)^4$

周期 4 でイコールになる．$n=4k$ で，後は同じである．

（5） 数学Ⅲ【微分係数】 基本

▶解答◀ $f(x)=\log|\tan 4x|$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{\tan 4x}\cdot\frac{4}{\cos^2 4x}$$

$$=\frac{4}{\sin 4x\cos 4x}=\frac{8}{\sin 8x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{48}\right)=\frac{8}{\sin\frac{\pi}{6}}=\mathbf{16}$$

（6） 数学Ⅱ【多項式の除法】 標準

▶解答◀ $\alpha=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}=\sqrt{5}+1$

$\alpha-1=\sqrt{5}$ の両辺を 2 乗して $\alpha^2-2\alpha-4=0$ を得る．$x^5-x^4-12x^3+12x^2+16x$ を x^2-2x-4 で割ると商が x^3+x^2-6x+4，余りが 16 であるから

$x^5-x^4-12x^3+12x^2+16x$

$=(x^2-2x-4)(x^3+x^2-6x+4)+16$

ここに $x=\alpha$ を代入すると

$$\alpha^5-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha$$

$$=(\alpha^2-2\alpha-4)(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha+4)+16=\mathbf{16}$$

注意 【次数下げ】

$\alpha^2=2\alpha+4$ に α を掛けて $\alpha^3=2\alpha^2+4\alpha$ となる．ここに $\alpha^2=2\alpha+4$ を代入して

$$\alpha^3=2(2\alpha+4)+4\alpha=8\alpha+8$$

これを繰り返すと $\alpha^4=24\alpha+32$，　$\alpha^5=80\alpha+96$ となる．

$$\alpha^5-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha$$

$$=80\alpha+96-(24\alpha+32)-12(8\alpha+8)$$

$$+12(2\alpha+4)+16\alpha=\mathbf{16}$$

（7） 数学Ⅲ【定積分】 標準

▶解答◀ $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx$,

$J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx$ とおく．J で $\frac{\pi}{6}-x=t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=-1$$

x	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$
t	$\frac{\pi}{6}\ \to\ 0$

$$J=\int_{\frac{\pi}{6}}^0 f(t)\,(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx=I$$

1 つ目の空欄は $I-J=\mathbf{0}$

$$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-3\right)}$$

$$=\frac{\cos^3 3x}{\cos^3 3x+\sin^3 3x}$$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^3 3x}{\cos^3 3x+\sin^3 3x}\,dx$ であるから

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^3 3x+\sin^3 3x}{\cos^3 3x+\sin^3 3x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx=\frac{\pi}{6}$$

$$I=J=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

（8） 数学A【確率の雑題】 標準

▶解答◀ 3 個のサイコロを A，B，C とし，それぞれの出る目を a, b, c とする．(a, b, c) は 6^3 通りある．

$$a+b+c\leqq 8$$

$$1\leqq a\leqq 6,\ 1\leqq b\leqq 6,\ 1\leqq c\leqq 6$$

のとき

$$d=8-(a+b+c)+1$$

とおくと

$$a+b+c+d=9,\ a\geqq 1,\ b\geqq 1,\ c\geqq 1,\ d\geqq 1$$

となり，このとき $a\leqq 6, b\leqq 6, c\leqq 6$ は成り立つ．9 個の○を一列に並べ，○と○の間（8 か所ある）のうちから 3 か所選んで |（仕切り）を 1 本ずつ入れ，1 本目の | より左側の○の個数を a，1 本目と 2 本目の | の間の○の個数を b，2 本目と 3 本目の | の間の○の個数を c，3 本目の | より右側の○の個数を d とする．図は $(a, b, c, d)=(1, 3, 2, 3)$ のときである．

○ | ○○○ | ○○ | ○○○

(a, b, c, d) は ${}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=8\cdot 7$ 通りあるから，$a+b+c\leqq 8$ となる確率は

$$\frac{8\cdot 7}{6^3}=\boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

$$abc\leqq 12,\ 1\leqq a\leqq 6,\ 1\leqq b\leqq 6,\ 1\leqq c\leqq 6$$

のときを考える．ab の値は次のようになる．

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$c=1$ のとき $ab\leqq 12$ で，これを満たす (a, b) は 23 通りある．

$c=2$ のとき $ab \leqq 6$ で，これを満たす (a, b) は 14 通りある．

$c=3$ のとき $ab \leqq 4$ で，これを満たす (a, b) は 8 通りある．

$c=4$ のとき $ab \leqq 3$ で，これを満たす (a, b) は 5 通りある．

$c=5$ のとき $ab \leqq 2.4$ で，これを満たす (a, b) は 3 通りある．

$c=6$ のとき $ab \leqq 2$ で，これを満たす (a, b) は 3 通りある．

$abc \leqq 12$ となる a, b, c は $23+14+8+5+3+3=56$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{56}{6^3}=\mathbf{\frac{7}{27}}$$

(9) 数学I【2次不等式】標準

▶解答◀ $x^2-9x+20<0$

$$(x-4)(x-5)<0$$

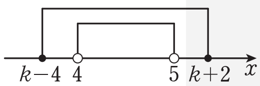
$$4<x<5$$

$$x^2-2(k-1)x+k^2-2k-8 \leqq 0$$

$$x^2-2(k-1)x+(k-4)(k+2) \leqq 0$$

$$\{x-(k-4)\}\{x-(k+2)\} \leqq 0$$

$$k-4 \leqq x \leqq k+2$$



求める条件は $k-4 \leqq 4$ かつ $k+2 \geqq 5$ より $\boldsymbol{3 \leqq k \leqq 8}$ である．

(10) 数学B【漸化式】標準

▶解答◀ $S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{n^3}{a_n}\right)$ ……………………①

で，$n=1$ とすると

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$$

$a_1{}^2=1$ となり $a_1>0$ より $a_1=1$ である．

$n \geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$ であり，これを $2S_n=a_n+\dfrac{n^3}{a_n}$ に代入し

$$2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{n^3}{S_n-S_{n-1}}$$

$$S_n+S_{n-1}=\frac{n^3}{S_n-S_{n-1}}$$

$$S_n{}^2-S_{n-1}{}^2=n^3$$

$k \geqq 2$ のとき $S_k{}^2-S_{k-1}{}^2=k^3$ を $k=2, 3, \cdots, n$ とした式について辺ごとに加える．

$$S_n{}^2-S_1{}^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-1^3$$

$S_1=1$ より $S_n{}^2=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ となり，$S_n>0$ より $S_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ である．

したがって

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=\mathbf{15},\ S_{20}=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=\mathbf{210}$$

$$S_n{}^2-\cancel{S_{n-1}{}^2}=n^3$$
$$\cancel{S_{n-1}{}^2}-\cancel{S_{n-2}{}^2}=(n-1)^3$$
$$\vdots$$
$$\cancel{S_3{}^2}-\cancel{S_2{}^2}=3^3$$
$$\cancel{S_2{}^2}-S_1{}^2=2^3$$

注意 1°【一般項】

$n \geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=n$

結果は $n=1$ でも成り立つ．よって $a_n=n$ である．

2°【元祖】

受験雑誌「大学への数学」第 3 巻に行われた読者の作問コンクールで，第 3 位になった鹿野健氏（当時麻生高校 3 年，後に山形大教授）の問題が

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$, $a_n>0$ である．

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ になる．後に徳島大学などに出題された．$a_n=S_n-S_{n-1}$ で a_n を消去するという発想が新傾向のものであった．この元祖では

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ と予想することは難しい．

◆別解◆ ① で $n=1$ として

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$$

$a_1{}^2=1$ となり $a_1>0$ より $a_1=1$ である．

① で $n=2$ として

$$1+a_2=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{8}{a_2}\right)$$

$$a_2{}^2+2a_2-8=0$$

$$(a_2-2)(a_2+4)=0$$

$a_2>0$ より $a_2=2$ である．

① で $n=3$ として

$$1+2+a_3=\frac{1}{2}\left(a_3+\frac{27}{a_3}\right)$$

$$a_3{}^2+6a_3-27=0$$

$$(a_3+9)(a_3-3)=0$$

$a_3>0$ より $a_3=3$ である．

$a_n=n$ であることを数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のとき成り立つ．

$n=1, 2, \cdots, k$ で成り立つとする．

$$a_1=1,\ a_2=2,\ \cdots,\ a_k=k$$

である．このとき

$$S_{k+1}=a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}$$
$$=(1+2+\cdots+k)+a_{k+1}=\frac{1}{2}k(k+1)+a_{k+1}$$

であり，$S_{k+1}=\frac{1}{2}\left\{a_{k+1}+\frac{(k+1)^3}{a_{k+1}}\right\}$ であるから

$$\frac{1}{2}k(k+1)+a_{k+1}=\frac{1}{2}\left\{a_{k+1}+\frac{(k+1)^3}{a_{k+1}}\right\}$$

$${a_{k+1}}^2+k(k+1)a_{k+1}-(k+1)^3=0$$

$$\{a_{k+1}-(k+1)\}\{a_k+(k+1)^2\}=0$$

$a_{k+1}>0$ より $a_{k+1}=k+1$ である．$n=k+1$ のとき成り立つから証明された．

したがって，$S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ であるから

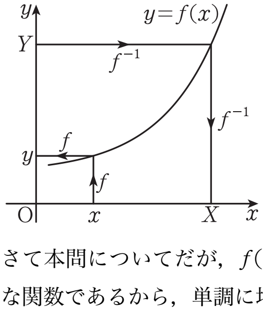
$$S_5=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=\mathbf{15},\ S_{20}=\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=\mathbf{210}$$

注意　**【帰納法の構造】**

実験の様子をよく見ると
「a_1 の値を用いて a_2 を求める」
「a_1, a_2 の値を用いて a_3 を求める」
という状態になっている．次は
「a_1, a_2, a_3 の値を用いて a_4 を求める」
ことになる．したがって，$a_1=1, \cdots, a_k=k$ を仮定して $a_{k+1}=k+1$ を証明する形の帰納法（人生帰納法という用語はある程度定着している）になるはずだと，理解してほしいが，実際に答案を書かせると「$n=k$ のとき成り立つとすると」としか，書かない人が多い．あるいは「常に $a_n=n$ が成り立つとすると，$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{n^3}{a_n}\right)$ が成り立つ」という「十分性としての形」の答案を書く人も多い．

2　数学III【定積分】標準

考え方　一般に関数 $y=f(x)$ が逆関数をもつということは x と y が互いに 1 対 1 対応するということである．通常 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ と書く．本問では $g(x)=f^{-1}(x)$ である．逆関数を求めるとき，$y=f(x)$ を x について解いて $x=f^{-1}(y)$ の形にして，x と y を形式的に入れかえて $y=f^{-1}(x)$ とするように教科書などでは書いていることが多いが，x と y の形式的な入れかえは本来不要である．

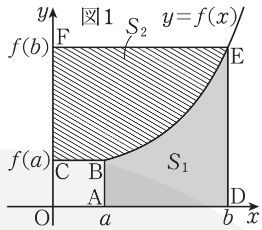


さて本問についてだが，$f(x)$ が逆関数をもつ微分可能な関数であるから，単調に増加するか，単調に減少するかである．さらに

$$S_2=\int_{f(a)}^{f(b)}g(y)\,dy$$

と考えると，S_1, S_2 の意味を図形的に理解することができる．計算については別解を見よ．

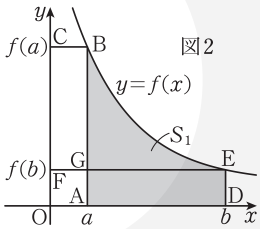
▶解答◀　（1）　$f(x)$ は微分可能で，微分可能な逆関数をもつから，$f(x)$ は単調に増加（常に増加）するか，単調に減少（常に減少）する．

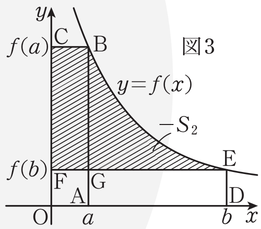


以下，$A(a, 0)$, $B(a, f(a))$, $C(0, f(a))$, $D(b, 0)$, $E(b, f(b))$, $F(0, f(b))$ とし，図形 X の面積を $[X]$ で表す．図 1 を見よ．$f(x)$ が単調に増加するとき $S_1=[\mathrm{ADEB}]$, $S_2=[\mathrm{BEFC}]$ で

$$S_1+S_2=[\mathrm{ODEF}]-[\mathrm{OABC}]=bf(b)-af(a)$$

である．





$G(a, f(b))$ とする．図 2 を見よ．$S_1=[\mathrm{ADEB}]$ である．また $f(a)>f(b)$ であるから

$$\int_{f(b)}^{f(a)}g(y)\,dy=-\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)\,dx=-S_2$$

となり，$-S_2=[\mathrm{BCFE}]$ である．

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=[\mathrm{ADEG}]-[\mathrm{BCFG}]\\&=[\mathrm{ODEF}]-[\mathrm{OABC}]=bf(b)-af(a)\end{aligned}$$

である．

以上より $S_1+S_2=\boldsymbol{bf(b)-af(a)}$ である．

（2）　$f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x}-1}$ のとき $f(3)=1$, $f(99)=3$ である．$y=\sqrt{\sqrt{1+x}-1}$ とすると

$$y^2=\sqrt{1+x}-1$$

$$1+x=(y^2+1)^2$$

$$x=y^4+2y^2$$

であるから，$g(y)=y^4+2y^2$ である．

$$S_1=\int_3^{99}f(x)\,dx,\ S_2=\int_1^3 g(y)\,dy$$

$$S_2=\int_1^3(y^4+2y^2)\,dy=\left[\frac{y^5}{5}+\frac{2y^3}{3}\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{243}{5}+18\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{986}{15}$$
$$S_1=99f(99)-3f(3)-S_2$$
$$=99\cdot 3-3\cdot 1-\frac{986}{15}=\boldsymbol{\frac{3424}{15}}$$

（**3**） $f(x)=\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}$ のとき $f(1)=\sqrt{3}$, $f(3)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．$y=\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}$ とすると $y^2=\dfrac{4}{x}-1$ であり，$x=\dfrac{4}{y^2+1}$ だから $g(y)=\dfrac{4}{y^2+1}$

$$S_1=\int_1^3 f(x)\,dx,\ S_2=\int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} g(y)\,dy$$

である．$y=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

y	$\sqrt{3}\ \to\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
θ	$\dfrac{\pi}{3}\ \to\ \dfrac{\pi}{6}$

$$S_2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}4\,d\theta=\Big[4\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$$
$$S_1=3f(3)-1\cdot f(1)-S_2$$
$$=\sqrt{3}-\sqrt{3}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

♦別解♦　（**1**） $x=g(y)$ のとき $y=f(x)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

y	$f(a)\ \to\ f(b)$
x	$a\ \to\ b$

$$\int_{f(a)}^{f(b)}g(y)\,dy=\int_a^b x\,\frac{dy}{dx}\,dx$$
$$=\int_a^b xf'(x)\,dx$$
$$=\Big[xf(x)\Big]_a^b-\int_a^b(x)'f(x)\,dx$$
$$=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)\,dx$$
$$S_2=bf(b)-af(a)-S_1$$
$$S_1+S_2=\boldsymbol{bf(b)-af(a)}$$

（**3**） $x=4\cos^2\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-8\cos\theta\sin\theta$$

x	$1\ \to\ 3$
θ	$\dfrac{\pi}{3}\ \to\ \dfrac{\pi}{6}$

$$\int_1^3\sqrt{\frac{4}{x}-1}\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}\cdot(-8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$
$$=8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2\theta}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=4\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

3　数学A 【整数の雑題】 やや難

▶解答◀　（**1**） 問題文の e 点の説明が回りくどい．「$p-e$ または $p+e$ のどちらかと，$q+\dfrac{1}{2}$ がともに整数」と，「整数」に結びつけているが，整数に帰着させる意味が分からない．「例えば」を見れば，「任意の整数 m,n に対して $\left(m-e,\,n+\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(m+e,\,n+\dfrac{1}{2}\right)$ の形のものを e 点と呼ぶ」でよいのではないのか？そして，このとき $m-e$ または $m+e$ を r とおき，$n+\dfrac{1}{2}$ を s とおく．r は無理数，s は整数でない有理数である．

2 つの異なる格子点 $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(c,d)$ を結ぶ線分で，e 点 $\mathrm{R}(r,s)$ を通るものがあると仮定する．a,b,c,d は整数である．$r\neq a$ であるから AR は x 軸に垂直でなく，AR，AB の傾きを比べて $\dfrac{s-b}{r-a}=\dfrac{d-b}{c-a}$ となる．$s-b\neq 0$ であるから $d-b\neq 0$ である．

$r-a=\dfrac{(c-a)(s-b)}{d-b}$ となり，左辺は無理数，右辺は有理数で矛盾する．よって証明された．

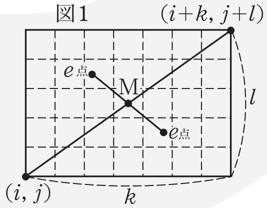
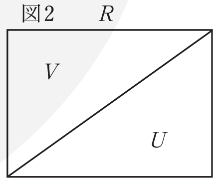
図1


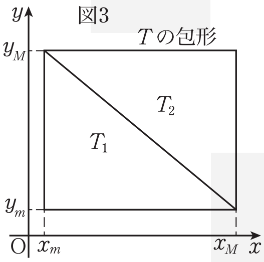
図2


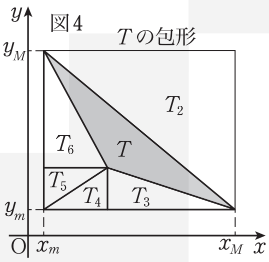
（**2**） m,n は任意の整数とする．$2.7<e<2.8$ だから正方形 $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ 内の e 点は $\left(e-2,\,\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(3-e,\,\dfrac{1}{2}\right)$ の 2 個だけあり，正方形 $m\leqq x\leqq m+1$, $n\leqq y\leqq n+1$ 内の e 点は $\left(m+e-2,\,n+\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(m+3-e,\,n+\dfrac{1}{2}\right)$ の **2** 個．

（**3**） 三角形 T に対し，その面積を $S(T)$ とし，T の内部にある e 点の個数を $E(T)$ で表すことにする．さらに，「4 つの格子点を頂点とし，1 辺の長さが 1 の任意の正方形」を単位正方形と呼ぶことにする．$i,\,j$ を整数，$k,\,l$ を自然数とする．長方形 $R:i\leqq x\leqq i+k,\ j\leqq y\leqq j+l$ の中心 $\left(i+\dfrac{k}{2},\,j+\dfrac{l}{2}\right)$ を M とする．R には単位正方

形が kl 個ある．R の面積は kl である．R の内部には $2kl$ 個の e 点があり，R の周や対角線上には e 点はなく，R の内部にある e 点の M に関する対称点は R の内部の e 点である．R を対角線で二分割した直角三角形の一方を U，他方を V とする．U, V の周上には e 点はなく，U の内部にある e 点と V の内部にある e 点は，kl 個ずつある．$E(U)=kl$，$S(U)=\dfrac{1}{2}kl=\dfrac{1}{2}E(U)$ であるから証明された．

（**4**）図 3，4 を見よ．格子点を頂点とする任意の三角形を T とする．T の 3 頂点の x 座標の最小値を x_m，最大値を x_M，y 座標の最小値を y_m，最大値を y_M とする．4 点 $(x_m, y_m), (x_M, y_m), (x_M, y_M), (x_m, y_M)$ を頂点とする長方形を T の（以下 T のを省略する）包形と呼ぶことにする．以下，$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ はすべて，（3）に出てくる，1 辺が x 軸に平行，1 辺が y 軸に平行な直角三角形である．T の包形はその対角線で 2 つの直角三角形 T_1, T_2 に分けることができる．





そして「包形から幾つかの直角三角形を除いたものが T」と捉えることができる．

x_m，x_M，y_m，y_M で 4 つの値があるが，T の頂点の中に，このどれも持たないものがあるときは図 4 のように，その頂点から包形の辺に下ろした 2 本の垂線（T の内部を通らないもの）と包形の 2 辺で長方形をなし，さらにその長方形を 2 分割（T_4 と T_5）して包形から 5 つの直角三角形 $T_2, \cdots, T_6$ を除いた形になる．きちんと書くと結構鬱陶しい．以下は図を見ていただきたい．

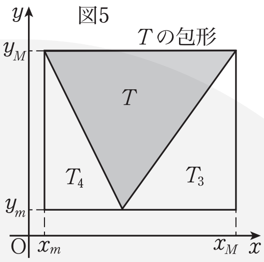
$$
\begin{aligned}
S(T) &= S(T_1)-S(T_3)-S(T_4)-S(T_5)-S(T_6)\\
&= \frac{1}{2}E(T_1)-\frac{1}{2}E(T_3)-\frac{1}{2}E(T_4)\\
&\qquad -\frac{1}{2}E(T_5)-\frac{1}{2}E(T_6)=\frac{1}{2}E(T)
\end{aligned}
$$

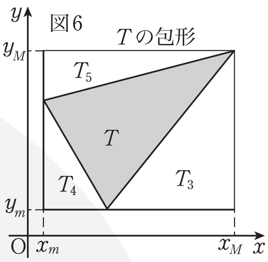
T が（3）に出てくる直角三角形の場合もあるが，これは省略する．図 5 のように T が，包形から 2 つの三角形 T_3, T_4 を除く形のときには

$$
\begin{aligned}
S(T) &= S(T_1)+S(T_2)-S(T_3)-S(T_4)\\
&= \frac{1}{2}E(T_1)+\frac{1}{2}E(T_2)-\frac{1}{2}E(T_3)-\frac{1}{2}E(T_3)\\
&= \frac{1}{2}E(T)
\end{aligned}
$$

包形から 3 つの直角三角形を除く場合（図 6）でも同様である．

（**5**）これは有名問題であり，e 点など使わない方法が知られている．3 頂点を格子点にもつ正三角形 ABC が存在すると仮定する．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a, b)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c, d)$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は格子点 A，B の成分同士の差であるから，a, b は整数になる．同じく c, d も整数である．三角形 ABC の面積 $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$ は有理数であり，一方 $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AB}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$ は無理数であるから矛盾する．よって証明された．





注意 **1°【出題者の意図に従えば】**

（5）では次のようにすると $\dfrac{1}{2}|ad-bc|$ を使わなくても証明できる．

3 頂点が格子点の三角形の面積は，包形の面積（整数）から，幾つかの直角三角形の面積を引いたものであるから，面積は有理数である．また，一辺の長さの 2 乗は x 成分の差の 2 乗と y 成分の差の 2 乗の和であるから整数である．ところが，正三角形 ABC の面積 $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AB}^2$ は無理数であるから矛盾する．

2°【交角に着目すると】

3 頂点が格子点の三角形 ABC の辺の中には x 軸に垂直でない 2 辺があるから，それを AB，AC とする．左まわりに A，B，C の順であるとする．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a, b)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c, d)$ とおく．a, b, c, d は整数であり，a, c は 0 でない．AB，AC の傾きを m_1, m_2 とする．

$$
\tan\angle\mathrm{BAC}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{d}{c}}
$$

は有理数である．$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ であるから，$\angle\mathrm{BAC}$ が 60 度になることはない．

要の分析　例年通り標準的な問題が多いが，**3** は見た目に圧倒されて，試験場では敬遠した人も多いだろう．特に（4）は難しい．

（荻原，楊，遠藤，安田亨）