久留米大学・医学部

試験日 2023 年 2 月 1 日 時間 90 分 数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=3$ を満たしているとき，

（1） $|\vec{a}|^2$ と $|\vec{b}|^2$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ だけで表すと，

$$|\vec{a}|^2=\boxed{}-\boxed{}\vec{a}\cdot\vec{b},\ |\vec{b}|^2=\boxed{}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

である．

（2） $\vec{a}\cdot\vec{b}$ のとりうる値の範囲は，

$$\boxed{}\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

である．

（3） $|\vec{a}+\vec{b}|$ のとりうる値の最大値と最小値は，

最大値 $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$，最小値 $\boxed{}$

である．

2 どの目も等しい確率で出る 1 個のサイコロを 1 回投げ，出た目が 3 の倍数ならば 2 点が加点され，3 の倍数でなければ 1 点が減点されるゲームをくり返し行う．最初の持ち点を 0 点とするとき，

（1） 3 回目のゲーム終了時に 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

（2） 6 回目のゲーム終了時にはじめて 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

（3） 3 回目のゲーム終了時に 0 点になり，9 回目のゲーム終了時に 2 回目の 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

（4） 9 回目のゲーム終了時にはじめて 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

3 n を正の整数とする．連立不等式

$$\begin{cases} y\geqq 2^{\log_2 x+x} \\ y\leqq -x^2+n(2^n+n) \end{cases}$$

で表される領域を D_n とする．ただし，x 座標と y 座標がともに整数となる点を「格子点」と呼ぶものとする．

（1） D_2 に含まれる格子点の個数は $\boxed{}$ 個である．

（2） $S=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$ とするとき，

$$S=(n-\boxed{})\cdot2^{n+\boxed{}}+\boxed{}$$

である．

（3） D_n に含まれる格子点の個数を n を用いて表すと，

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}n^3-\frac{\boxed{}}{\boxed{}}n^2+\frac{\boxed{}}{\boxed{}}n-\boxed{}+(n^2-\boxed{}n+\boxed{})\cdot2^n$$

である．

4 平面上に点 O を中心とする半径が 1 の円 C_1 と，点 O を中心とする半径が $\sqrt{6}$ の円 C_2 がある．円 C_2 上に点 A をとり，点 A から円 C_1 に引いた接線と円 C_1 との接点の 1 つを P，直線 OP と円 C_1 の交点のうち点 P と異なる点を Q，直線 AQ と円 C_1 との交点のうち点 Q と異なる点を R とおく．

このとき，

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\square},\ \mathrm{AQ}=\square,\ \mathrm{AR}=\frac{\square}{\square}$$

であり，直線 AP と円 C_2 の交点のうち点 A と異なる点を S，直線 AO と直線 SQ の交点を T とおくと，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PS}=\boxed{\text{ア}}:\boxed{\text{イ}},\ \mathrm{ST}:\mathrm{TQ}=\boxed{\text{ウ}}:\boxed{\text{エ}}$$

である．ここで，$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$は最小の自然数を用いて答えよ．

さらに，直線 PR と直線 OA の交点を点 U，直線 PR と円 C_2 の 2 つの交点を D，E とすると，

$$\mathrm{AU}=\frac{\square\sqrt{\square}}{\square}$$

であるので，

$$\mathrm{DU}\times\mathrm{EU}=\frac{\square}{\square}$$

である．

5　関数 $f(x)$ は積分区間の範囲の中で定義される連続な関数である．ただし，a は実数の定数とし，e は自然対数の底とする．

（1） $\displaystyle\int_1^{\log x} f(t)\,dt=2x-2e$ のとき，$f(x)=\square e^x$ である．

（2） $\displaystyle\int_1^{2}(x+t)f(t)\,dt=f(x)+2x-4$ のとき，$f(x)=\dfrac{\square x+\square}{5}$ である．

（3） $\displaystyle\int_1^{\log x} f(t)\,dt-\int_1^{2}(x+t)f(t)\,dt=2x+a$ のとき，

$f(x)=\dfrac{\square e^x}{e^2-e-1}$ であり，$a=\dfrac{\square e^2+\square e}{e^2-e-1}$ である．

1

数学B【平面ベクトルの内積】**標準**

▶解答◀　（**1**） $|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$ より

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1 \quad\cdots\cdots①$$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=3^2$ より

$$9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9 \quad\cdots\cdots②$$

②$-$①$\times 4$ より

$$5|\vec{a}|^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}=5 \qquad \therefore\quad |\vec{a}|^2=\boldsymbol{1-4\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

①$\times 9-$② より

$$-30\vec{a}\cdot\vec{b}+5|\vec{b}|^2=0 \qquad \therefore\quad |\vec{b}|^2=\boldsymbol{6\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

（**2**） $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく．（1）より

$$|\vec{a}|^2=1-4t,\ |\vec{b}|^2=6t$$

$|\vec{a}|^2\geqq 0,\ |\vec{b}|^2\geqq 0$ であるから，$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{4}$ $\cdots\cdots③$

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおく．$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ から

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$$

が成り立つ．$|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2\leqq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ より

$$t^2\leqq(1-4t)\cdot 6t$$

$$t(25t-6)\leqq 0$$

$$0\leqq t\leqq\frac{6}{25} \quad\cdots\cdots④$$

③ かつ ④ より，$0\leqq t\leqq\dfrac{6}{25}$

ただし，ここで気をつけなければならない．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ には，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=3$ という条件がある．④ を導くのに用いた $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$ という関係式は，$\vec{a},\vec{b}$ に特に制約のないときに成り立つ関係式である．したがって，本問の $\vec{a},\vec{b}$ で $t=0$ や $t=\dfrac{6}{25}$ という値が実現するかどうかの確かめをしておかないと危険である．

　$t=0$ は比較的見つけやすい．$\vec{a}$ を $|\vec{a}|=1$ を満たすベクトル，$\vec{b}=\vec{0}$ ととれば，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=3$ を満たして $t=0$ である．

　$t=\dfrac{6}{25}$ については ④ の等号が成り立つときであるから，もし実現するならば，$|\vec{a}|\neq 0$ かつ $|\vec{b}|\neq 0$ かつ $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ のときである．$\vec{b}=k\vec{a}$（ただし $k\neq 0$）とおくと

$$|1-k||\vec{a}|=1,\ |3+2k||\vec{a}|=3$$

これを解いて，$|\vec{a}|=\dfrac{1}{5},\ k=6$

　実際に $|\vec{a}|=\dfrac{1}{5},\ \vec{b}=6\vec{a}$ となる $\vec{a},\vec{b}$ をとれば，与え

られた条件を満たして $t=\dfrac{6}{25}$ となる．

以上より，$\boldsymbol{0 \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq \dfrac{6}{25}}$ である．

（**3**）　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1-4t+2t+6t=1+4t$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{6}{25}$ より，$|\vec{a}+\vec{b}|^2$ は $t=\dfrac{6}{25}$ のとき最大値 $\dfrac{49}{25}$，$t=0$ のとき最小値 1 をとる．よって，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{7}{5}}$，最小値は **1** である．

注意（２）で危険を避けようとするならば，基底の変更をするのが本筋である．$\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}$ となる２つのベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ をとると，$|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=3$ で

$$\vec{a}=\frac{1}{5}(2\vec{p}+\vec{q}),\ \vec{b}=\frac{1}{5}(-3\vec{p}+\vec{q})$$

であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{25}(2\vec{p}+\vec{q})(-3\vec{p}+\vec{q})$$
$$=\frac{1}{25}(-6|\vec{p}|^2-\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)$$
$$=\frac{1}{25}(-6-\vec{p}\cdot\vec{q}+9)=\frac{1}{25}(3-\vec{p}\cdot\vec{q})$$

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角はすべての値をとりうるから

$$-|\vec{p}||\vec{q}| \leqq \vec{p}\cdot\vec{q} \leqq |\vec{p}||\vec{q}|$$

すなわち $-3 \leqq \vec{p}\cdot\vec{q} \leqq 3$ が成り立ち，これを用いて $0 \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq \dfrac{6}{25}$ が得られる．

2

数学A【独立試行・反復試行の確率】**標準**

▶解答◀　（**1**）　横軸に試行回数 k，縦軸に得点 t をとる．

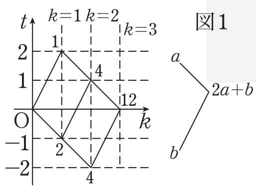


図1

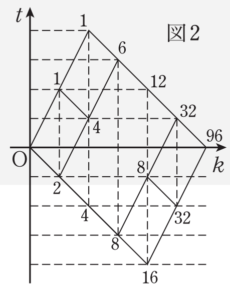


図2

1 回の試行で，↗（ただし線分の傾きは 2）になる確率は $\dfrac{1}{3}$，↘（ただし線分の傾きは -1）になる確率は $\dfrac{2}{3}$ である．3 回目で 0 点になるのは，2 点加点の ↗ が 1 回，1 点減点の ↘ が 2 回起こるときであるから，求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

図 1 のように図に書き込んで表すことができる．図 1 の 12 は分子を表し，実際の数は $\dfrac{12}{3^3}$ である．以後，$k=1$ 等は書かない．また t，k の目盛りも書かない．

（**2**）　図 2 を見よ．ただし $k=3$ で $t=0$ になる経路は描いていない．求める確率は $\dfrac{96}{3^6}=\boldsymbol{\dfrac{32}{243}}$ である．

（**3**）（１）と（２）の結果を用いる．求める確率は，$k=3$ で $t=0$ になり（確率 $\dfrac{4}{9}$），次の 3 回では 0 点にならず 6 回後に $t=0$ になる（確率 $\dfrac{32}{243}$）ときの確率であるから

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{32}{243}=\boldsymbol{\frac{128}{2187}}$$

（**4**）　図 3 を見よ．$k=3$ や $k=6$ で $t=0$ になる枝は描かない．求める確率は $\dfrac{1344}{3^9}=\boldsymbol{\dfrac{448}{6561}}$

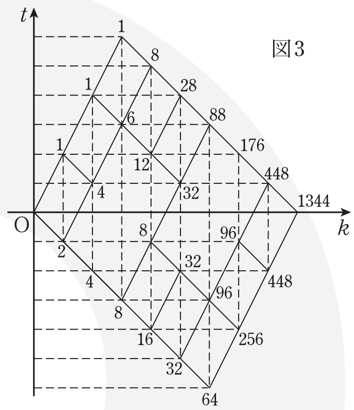


図3

注意　**【計算で押す】**

k 回後に $t=0$ になるのは k が 3 の倍数のときである．途中で $t=0$ になってもよいとして，$3k$ 回後に $t=0$ になる確率を $P(3k)$ と表すことにする．計算の都合上，ひとまず約分はしない．

$$P(3k)={}_{3k}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$$

（１）は $P(3)={}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{12}{27}$

（２）は

$$P(6)-P(3)P(3)={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4-\frac{144}{3^6}$$
$$=\frac{15\cdot16-144}{3^6}=\frac{96}{3^6}$$

（４）は $P(9)$ から，「$k=3$ で $t=0$ になり，ちょうど後 6 回で $t=0$ になる（その 3 回目では $t=0$ にならない）」「$k=6$ で $t=0$ になり（その 3 回目では $t=0$ にならない），後 3 回で $t=0$ になる」「3 回ごとに $t=0$ になる」を除くと考える．

$$P(9)-\frac{96\cdot12\cdot2+12^3}{3^9}$$
$$=\frac{3\cdot4\cdot7\cdot2^6-2304-1728}{3^9}$$
$$=\frac{5376-4032}{3^9}=\frac{1344}{3^9}$$

3 数学B【数列の雑題】標 準

▶解答◀　（1）　真数条件より，$x>0$

$$2^{\log_2 x+x}=2^{\log_2 x}\cdot 2^x=x\cdot 2^x$$

であるから，領域 D_n は

$$x\cdot 2^x \leqq y \leqq -x^2+n(2^n+n),\ x>0$$

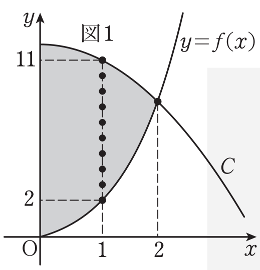
と表される．$f(x)=x\cdot 2^x$, $g(x)=-x^2+n(2^n+n)$ とおく．$f(x)$ と $g(x)$ を連立すると

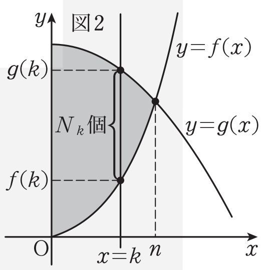
$$x\cdot 2^x=-x^2+n(2^n+n)$$

$$x\cdot 2^x-n\cdot 2^n+(x+n)(x-n)=0$$

$x=n$ のとき，この等式は成り立つ．$x>0$ で $f(x)$ は増加関数，$g(x)$ は減少関数だから，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは $x=n$ で交点をもち，それ以外の共有点はない．

$n=2$ のとき，$g(x)=-x^2+12$ で $y=f(x)$ と $y=g(x)$（曲線 C とする）は $x=2$ で交点をもつから，D_2 は図 1 の網目部分（境界は y 軸上の点以外は含む）である．格子点は $x=1$ のとき $11-2+1=10$ 個，$x=2$ のとき 1 個だから，全部では $10+1=$ **11** 個である．





（2）　$S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$

$2S=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$

辺ごとに引いて

$$-S=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}$$

$$S=n\cdot 2^{n+1}-2\cdot\frac{1-2^n}{1-2}$$

$$=n\cdot 2^{n+1}+2(1-2^n)=\boldsymbol{(n-1)\cdot 2^{n+1}+2}$$

（3）　D_n は図 2 の網目部分（境界は y 軸上の点以外は含む）で，$x=k$ のときの D_n 内の格子点の個数を N_k とおくと

$$N_k=g(k)-f(k)+1$$

$$=-k^2+n(2^n+n)-k\cdot 2^k+1$$

$$=(n^2+1+n\cdot 2^n)-k^2-k\cdot 2^k$$

$k=1\sim n$ の N_k をすべて足し合わせたものが求める格子点の個数であるから

$$\sum_{k=1}^{n}N_k=(n^2+1+n\cdot 2^n)n-\sum_{k=1}^{n}k^2-S$$

$$=(n^2+1+n\cdot 2^n)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$-(n-1)\cdot 2^{n+1}-2$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n-2+(n^2-2n+2)\cdot 2^n}$$

4 数学A【円に関する定理】標 準

▶解答◀　（1）　図 1 を見よ．$\mathrm{OP}=1$, $\mathrm{OA}=\sqrt{6}$ より

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

これと $\mathrm{PQ}=2$ より

$$\mathrm{AQ}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=\boldsymbol{3}$$

方べきの定理より $\mathrm{AR}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AP}^2$ が成り立つから

$$\mathrm{AR}\cdot 3=(\sqrt{5})^2 \qquad \therefore\quad \mathrm{AR}=\boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

円 C_2 の弦 AS に中心 O から下ろした垂線の足と P は一致するから，P は線分 AS の中点である．よって

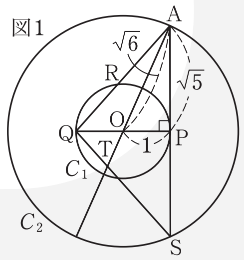
$$\mathrm{AP}:\mathrm{PS}=\boldsymbol{1:1}$$

△QPS と直線 AT に関してメネラウスの定理を用いて

$$\frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AS}}\cdot\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{TQ}}=1$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{TQ}}=1$$

$$\mathrm{ST}:\mathrm{TQ}=\boldsymbol{2:1}$$



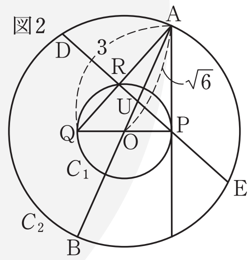


図 2 を見よ．△AQO と直線 RP に関してメネラウスの定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{OU}}{\mathrm{UA}}=1$$

$\mathrm{RQ}=\mathrm{AQ}-\mathrm{AR}=3-\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3}$ であるから

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{OU}}{\mathrm{UA}}=1$$

$$\mathrm{OU}:\mathrm{UA}=2:5$$

$$\mathrm{AU}=\frac{5}{7}\mathrm{OA}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{6}}{7}}$$

直線 OA と円 C_2 の交点を B とおく．方べきの定理より

$$\mathrm{DU}\cdot\mathrm{EU}=\mathrm{AU}\cdot\mathrm{BU}$$

$\mathrm{BU}=\mathrm{AB}-\mathrm{AU}=2\sqrt{6}-\dfrac{5}{7}\sqrt{6}=\dfrac{9}{7}\sqrt{6}$ であるから

$$\mathrm{DU}\cdot\mathrm{EU}=\frac{5}{7}\sqrt{6}\cdot\frac{9}{7}\sqrt{6}=\boldsymbol{\frac{270}{49}}$$

5 数学III【積分を含む等式】標 準

▶解答◀ （1） $\log x = u$ とおくと $x = e^u$ で

$$\int_1^u f(t)\,dt = 2e^u - 2e$$

両辺を u で微分して

$$f(u) = 2e^u \qquad \therefore \quad f(x) = \boldsymbol{2e^x}$$

（2） $x\int_1^2 f(t)\,dt + \int_1^2 tf(t)\,dt = f(x) + 2x - 4$

$A = \int_1^2 f(t)\,dt,\ B = \int_1^2 tf(t)\,dt$ とおくと

$$Ax + B = f(x) + 2x - 4$$

$$f(x) = (A-2)x + B + 4 \quad \cdots\cdots ①$$

であるから

$$A = \int_1^2 \{(A-2)t + B + 4\}\,dt$$

$$= \left[\frac{A-2}{2}t^2 + (B+4)t\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{2}(A-2) + B + 4 = \frac{3}{2}A + B + 1$$

$$\frac{1}{2}A + B + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$B = \int_1^2 \{(A-2)t^2 + (B+4)t\}\,dt$$

$$= \left[\frac{A-2}{3}t^3 + \frac{B+4}{2}t^2\right]_1^2$$

$$= \frac{7}{3}(A-2) + \frac{3}{2}(B+4) = \frac{7}{3}A + \frac{3}{2}B + \frac{4}{3}$$

$$\frac{7}{3}A + \frac{1}{2}B + \frac{4}{3} = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ より $A = -\frac{2}{5},\ B = -\frac{4}{5}$

① より，$f(x) = \boldsymbol{\frac{-12x+16}{5}}$

（3） $\log x = u$ とおくと

$$\int_1^u f(t)\,dt - \int_1^2 (e^u + t)f(t)\,dt = 2e^u + a$$

$C = \int_1^2 f(t)\,dt$ とおくと

$$\int_1^u f(t)\,dt - Ce^u - \int_1^2 tf(t)\,dt = 2e^u + a \quad \cdots\cdots ④$$

両辺を u で微分して

$$f(u) - Ce^u = 2e^u \qquad \therefore \quad f(u) = (C+2)e^u$$

$$C = \int_1^2 (C+2)e^t\,dt$$

$$= \Big[(C+2)e^t\Big]_1^2 = (C+2)(e^2 - e)$$

$$(e^2 - e - 1)C = -2(e^2 - e)$$

$$C = \frac{-2e^2 + 2e}{e^2 - e - 1}$$

$f(x) = (C+2)e^x$ であるから

$$f(x) = \left(\frac{-2e^2+2e}{e^2-e-1} + 2\right)e^x = \boldsymbol{\frac{-2e^x}{e^2-e-1}}$$

また，④ に $u = 1$ を代入して

$$-Ce - \int_1^2 tf(t)\,dt = 2e + a$$

$$a = -(C+2)e - \int_1^2 t\cdot(C+2)e^t\,dt$$

$$= -(C+2)\left(e + \int_1^2 te^t\,dt\right)$$

ここで

$$\int_1^2 te^t\,dt = \int_1^2 t(e^t)'\,dt$$

$$= \Big[te^t\Big]_1^2 - \int_1^2 (t)'e^t\,dt$$

$$= 2e^2 - e - \int_1^2 e^t\,dt = 2e^2 - e - \Big[e^t\Big]_1^2$$

$$= 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

であるから

$$a = -(C+2)(e + e^2)$$

$$= -\frac{-2}{e^2-e-1}(e+e^2) = \boldsymbol{\frac{2e^2+2e}{e^2-e-1}}$$

要の分析　例年 6 題であったが，今年は 1 題減って 5 題である．また数 III からの出題が減り，数 B からの出題が増えている．

（中郁，林聡，染矢，前田拓，安田亨）