久留米大学・後期

試験日　2023 年 3 月 8 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （1） $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，不等式 $(1+\sqrt{3})\sin\theta + (2+\sqrt{3})\cos\theta \leqq |\cos\theta|$ を満たす θ は

$$\frac{\square}{\square}\pi \leqq \theta \leqq \frac{\square}{\square}\pi$$

である．

（2） z は複素数で，$|z| = 1$ であるとき，$z^2 - 2z + \dfrac{1}{z}$ が純虚数であるような z の値は

$$z = \frac{\square \pm \sqrt{\square}\,i}{\square}$$

である．

2 （1） x が実数のとき，関数 $f(x) = \sqrt{13-x} - x + 1$ の最小値は $\square$ である．

（2） 無限等比数列 $\left\{\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}\right)^n\right\}$ が収束するような，整数 x の個数は $\square$ 個である．

（3） 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{\sqrt{13-x}}\right)^n$ が収束するとき，整数 x の個数は $\square$ 個である．また，整数 x で収束するときの和の最大値と最小値は

$x = \square$ のとき，最大値 $\dfrac{\square + \sqrt{\square}}{\square}$

$x = \square$ のとき，最小値 $\dfrac{\square - \sqrt{\square}}{\square}$

である．

3 箱の中に 1 から 8 までの数字が書かれた球が 1 つずつ合計 8 個入っている．この箱の中から無作為に 1 個の球を取り出し，球に書かれた数字を見た上で，箱の中に戻すという試行を繰り返す．k 回目に出た球に書かれた数を a_k とし，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n$ とする．S_n が 3 の倍数となる確率を p_n とするとき，

（1） 1 回の試行で，取り出された球に書かれた数を 3 で割った余りが 0 である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，3 で割った余りが 1 である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，3 で割った余りが 2 である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） a_1 を 3 で割った余りが 0 であり，かつ，S_2 を 3 で割った余りが 0 となる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，a_1 を 3 で割った余りが 0 ではなく，かつ，S_2 を 3 で割った余りが 0 となる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．よって，確率 p_2 は $p_2 = \dfrac{\square}{\square}$ である．

（3） p_{n+1} を p_n で表すと $p_{n+1} = \dfrac{\square}{\square}p_n + \dfrac{\square}{\square}$

よって，確率 p_n は，$p_n = \dfrac{\square}{\square} + \dfrac{\square}{\square}\cdot\left(\dfrac{\square}{\square}\right)^n$ である．

4 放物線 $y = 2x^2$ と円 $x^2 + (y-2)^2 = \dfrac{r^2}{9}$ がある．ただし，r は正の定数とする．

（1）　$r=6$ のとき，放物線と円の共有点の座標 $(x,\ y)$ は，

$$\left(\square,\ \square\right),\ \left(\frac{\sqrt{\square}}{\square},\ \frac{\square}{\square}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{\square}}{\square},\ \frac{\square}{\square}\right)$$

である．

（2）　r が正の実数をとって変化するとき，放物線と円の共有点の個数は，

$0<r<\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ のとき，$\square$ 個

$r=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\boxed{\text{エ}}<r$ の とき，$\square$ 個

$r=\boxed{\text{エ}}$ のとき，$\square$ 個

$\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}<r<\boxed{\text{エ}}$ のとき，$\square$ 個

である．

5　xyz 空間において，

$$\text{立体 } A:\begin{cases}|x|\leqq 1\\ |y|\leqq 1\\ z\geqq 0\end{cases}\qquad \text{立体 } B:|x|+|y|\leqq 2-z$$

があり，立体 A と立体 B の共通部分からなる立体を T とするとき，立体 T の体積 V を求める．

（1）　立体 T の z のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ア}}\leqq z\leqq\square$ である．

（2）　立体 T において，z の $\boxed{\text{イ}}\leqq z\leqq\boxed{\text{ウ}}$ の部分は，立体 B そのものである．

（3）　立体 T を平面 $z=t$ で切った切り口の面積を求める．$\boxed{\text{ア}}\leqq t\leqq\boxed{\text{イ}}$ のとき，その切り口の面積は $\square-\square t^{\square}$ であり，$\boxed{\text{イ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{ウ}}$ のとき，その切り口の面積は $\square\left(\square-t\right)^{\square}$ である．

（4）　立体 T の体積は $\square$ である．

1　（1）　数学Ⅱ【三角関数の不等式】標準

▶解答◀　$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とおく．

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の偏角が θ の点である．

$$(1+\sqrt{3})y+(2+\sqrt{3})x\leqq|x|$$

は，$x\geqq 0$ のとき

$$(1+\sqrt{3})y+(2+\sqrt{3})x\leqq x$$

$$(1+\sqrt{3})(y+x)\leqq 0\qquad \therefore\quad y\leqq -x\quad\cdots\cdots①$$

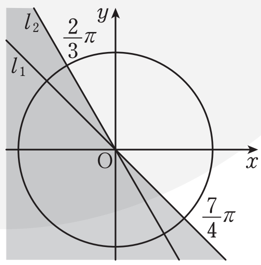
$x\leqq 0$ のとき

$$(1+\sqrt{3})y+(2+\sqrt{3})x\leqq -x$$

$$(1+\sqrt{3})(y+\sqrt{3}x)\leqq 0$$

$$y\leqq -\sqrt{3}x\quad\cdots\cdots②$$

であり，①，② を満たす領域は，図の境界を含む網目部分となる．ただし，図の円は単位円で，$l_1:y=-x$，$l_2:y=-\sqrt{3}x$ とし，円周上にその点に対する偏角を記入している．



P が網目部分にあるときの偏角 θ の範囲を考えて

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{7}{4}\pi}$$

（2）　数学Ⅲ【複素数平面】標準

▶解答◀　$z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) とおく．

$|z|=1$ より $x^2+y^2=1\cdots\cdots①$

また，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\overline{z}$ であるから

$$z^2-2z+\frac{1}{z}=z^2-2z+\overline{z}$$

$$=(x^2-y^2+2xyi)-2(x+yi)+x-yi$$

$= x^2 - x - y^2 + y(2x-3)i$

これが純虚数となる条件は

$x^2 - x - y^2 = 0$ ……………………………②

かつ　$y(2x-3) \neq 0$ ……………………………③

①より $y^2 = 1 - x^2$ である．②に代入して

$x^2 - x - (1-x^2) = 0$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$(x-1)(2x+1) = 0$　　$\therefore$　$x = 1, -\dfrac{1}{2}$

$x=1$ のとき，$y^2 = 1-1 = 0$ から $y=0$ となるが，これは③に反するから不適．

$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$y^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ から $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これは③を満たす．よって $\boldsymbol{z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$

2

数学Ⅲ【関数の増減・極値】標準

▶解答◀ (1)　$f(x) = \sqrt{13-x} - x + 1$

$13 - x \geqq 0$ であるから $x \leqq 13$

この範囲で $f(x)$ は減少関数である．

よって，$f(x)$ の最小値は $f(13) = \boldsymbol{-12}$ である．

(2)　$r = \dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}$ $(x<13)$ とおく．初項と公比が r の無限等比数列が収束する条件は $-1 < r \leqq 1$ である．まず $\left|\dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}\right| \leqq 1$ を整理する．2乗し分母をはらうと $x^2 - 2x + 1 \leqq 13 - x$ となる．$x^2 - x - 12 \leqq 0$ となり $(x+3)(x-4) \leqq 0$ で，$-3 \leqq x \leqq 4$ である．次に等号の話をする．$x=-3$ のとき $r=-1$ となり不適だが，$x=4$ のときは $r=1$ で適す．x の範囲は $-3 < x \leqq 4$ で，この範囲の整数は $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ の $\boldsymbol{7}$ 個ある．

(3)　初項，公比が r の無限等比級数が収束する条件は $-1 < r < 1$，すなわち $-3 < x < 4$ である．この範囲の整数は -2〜3 の $\boldsymbol{6}$ 個ある．無限等比級数の和を S とおくと $S = \dfrac{r}{1-r}$ である．

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1\cdot(1-r) - r(-1)}{(1-r)^2} = \frac{1}{(1-r)^2} > 0$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1\cdot\sqrt{13-x} - (x-1)\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{13-x}}}{(\sqrt{13-x})^2}$$

$$= \frac{2(13-x) + x - 1}{2(\sqrt{13-x})^3} = \frac{25-x}{2(\sqrt{13-x})^3} > 0$$

S は r の増加関数で r は x の増加関数だから，S は x が最小のときに最小になり，x が最大のときに最大になる．

$$S = \frac{r}{1-r} = \frac{x-1}{\sqrt{13-x} + 1 - x}$$

x が $-2, \cdots, 3$ の整数のときは，

最大値は $x = \boldsymbol{3}$ のときの $\dfrac{2}{\sqrt{10}-2} = \boldsymbol{\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}}$

最小値は $x = \boldsymbol{-2}$ のときの $\dfrac{-3}{\sqrt{15}+3} = \boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}}$

3

数学B【確率と漸化式】標準

▶解答◀ (1)　1〜8 のうち 3 で割った余りが 0, 1, 2 となる数の集合を R_0, R_1, R_2 とおくと

$R_0 = \{3, 6\}, R_1 = \{1, 4, 7\}, R_2 = \{2, 5, 8\}$

であるから，1回の試行でそれぞれの集合から取り出される確率は，順に $\dfrac{2}{8} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$, $\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$, $\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$ である．

(2)　以下の合同式は 3 を法とする．

$a_1 \equiv 0$ かつ $S_2 \equiv 0$ となるのは，$a_1 \equiv 0$ かつ $a_2 \equiv 0$ となるときで，この確率は

$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

$a_1 \not\equiv 0$ かつ $S_2 \equiv 0$ となるのは「$a_1 \equiv 1$ かつ $a_2 \equiv 2$」または「$a_1 \equiv 2$ かつ $a_2 \equiv 1$」となるときで，その確率は

$\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{8} = \boldsymbol{\dfrac{9}{32}}$

よって，$p_2 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{9}{32} = \boldsymbol{\dfrac{11}{32}}$

(3)　$S_{n+1} \equiv 0$ となるのは次の場合がある．

(ア)　$S_n \equiv 0$ の場合

$a_{n+1} \equiv 0$ のとき（確率 $\dfrac{1}{4}$）$S_{n+1} \equiv 0$ となる．

(イ)　$S_n \not\equiv 0$ の場合

$S_n \equiv 1$ であれば $a_{n+1} \equiv 2$ のとき（確率 $\dfrac{3}{8}$），$S_n \equiv 2$ であれば $a_{n+1} \equiv 1$ のとき（確率 $\dfrac{3}{8}$）$S_{n+1} \equiv 0$ となる．

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{8}(1-p_n)$$

$$p_{n+1} = \boldsymbol{-\frac{1}{8}p_n + \frac{3}{8}}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{8}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

(1)より $p_1 = \dfrac{1}{4}$ であるから $p_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n}$

4

数学Ⅱ【微分と方程式】標準

考え方　(1)を解くと放物線と円が原点で接する状況がわかる．ここから円の半径を増減することで放物線と円の位置関係はだいたいわかるが，本来，下に凸同士の曲線の共有点の状況を図を根拠に論じることは「見込み」であり，安全とは言えない．ここでは厳密に計算する解法をとる．

▶解答◀ (1)　$C_1 : y = 2x^2$,

$C_2 : x^2 + (y-2)^2 = \dfrac{r^2}{9}$ とおく．C_1 と C_2 を連立して

$$x^2 + (2x^2 - 2)^2 = \frac{r^2}{9}$$

$$4x^4-7x^2+4=\frac{r^2}{9} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$r=6$ のとき

$$4x^4-7x^2=0$$

$$x^2(4x^2-7)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\ \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

よって，このときの共有点の座標は

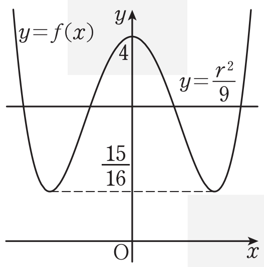
$$(x,\ y)=\mathbf{(0,\ 0)},\ \left(\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{7}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{7}{2}\right)$$

（**2**）①の左辺を $f(x)$ とおく．

$$f(x)=4x^4-7x^2+4$$

$$f'(x)=16x^3-14x=2x(8x^2-7)$$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{14}}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{14}}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗



$$f\left(\pm\frac{\sqrt{14}}{4}\right)=4\left(\frac{7}{8}\right)^2-7\cdot\frac{7}{8}+4=\frac{15}{16},\ f(0)=4$$

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\frac{r^2}{9}$ の共有点の個数より

$0<\frac{r^2}{9}<\frac{15}{16}\ \left(0<r<\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$ のとき，**0** 個

$\frac{r^2}{9}=\frac{15}{16},\ 4<\frac{r^2}{9}\ \left(r=\frac{3\sqrt{15}}{4},\ 6<r\right)$ のとき，**2** 個

$\frac{r^2}{9}=4\ (r=6)$ のとき，**3** 個

$\frac{15}{16}<\frac{r^2}{9}<4\ \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}<r<6\right)$ のとき，**4** 個

5　数学B【平面の方程式】標準

▶解答◀（**4**）$x,\ y$ にはすべて絶対値が被っているから，yz 平面，xz 平面に関して対称である．

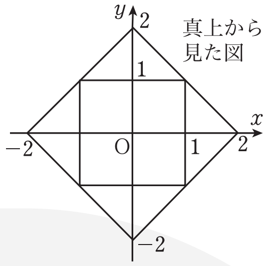
まず $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のときを考える．このとき

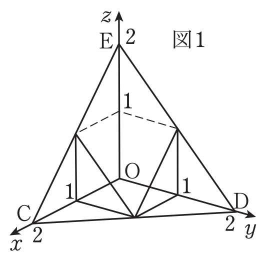
$$A':x\leqq 1,\ y\leqq 1,\ z\geqq 0$$

$$B':x+y+z\leqq 2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$$

とする．B' は図1の三角錐 OCDE である．これに $x\leqq 1,\ y\leqq 1$ を考えると，三角錐 OCDE を平面 $x=1$ で切り取った部分（C 側）を捨て，平面 $y=1$ で切り取った部分（D 側）を捨てたものが題意の立体になる．求める体積は「四面体 OCDE からそれを $\frac{1}{2}$ 倍に縮小した立体を 2 つ分引いたもの」の 4 倍を考え

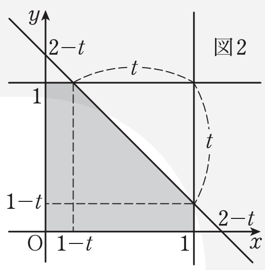
$$\frac{1}{6}2^3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\right\}\times 4=\frac{4}{3}(4-1)=\mathbf{4}$$

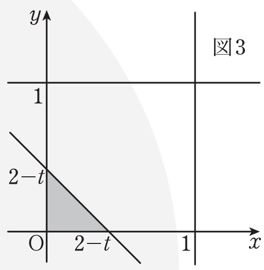




（**1**）$\mathbf{0\leqq z\leqq 2}$ である．

（**2**）T において $\mathbf{1\leqq z\leqq 2}$ は B そのものである．





（**3**）$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ で考える．$z=t$ のとき

$$A:x\leqq 1,\ y\leqq 1$$

$$B:x+y\leqq 2-t$$

であるから，共通部分は，$0\leqq t\leqq 1$ のときは図 2，$1\leqq t\leqq 2$ のときは図 3 のそれぞれ網目部分となる．

求める面積を S とおくと，S は網目部分の面積の 4 倍であるから，$0\leqq t\leqq 1$ のとき

$$S=4\left(1^2-\frac{1}{2}t^2\right)=\mathbf{4-2t^2}$$

$1\leqq t\leqq 2$ のとき，$S=4\cdot\frac{1}{2}(2-t)^2=\mathbf{2(2-t)^2}$

◆別解◆（**4**）積分を用いる．求める体積は

$$\int_0^2 S\,dt=\int_0^1(4-2t^2)\,dt+\int_1^2 2(2-t)^2\,dt$$

$$=\left[4t-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1+\left[-\frac{2}{3}(2-t)^3\right]_1^2=\mathbf{4}$$

要の分析　典型的な問題が多い．誘導も親切である．　（中郁，林聡，染矢，前田拓，安田亨）