# 久留米大学・医学部-推薦

試験日　2022 年 11 月 19 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

**1**　$x$ の方程式 $(\log_2 x)^2 - \left|\log_2 x^3\right| - \log_2 x = \log_2(x\cdot 2^k)\cdots$ⓐ（$k$ は定数）について，

（1）　$k=6$ のときの方程式 ⓐ の実数解は $x=\boxed{\phantom{0}}$ である．

（2）　方程式 ⓐ の実数解が 1 個となるような $k$ の値は $k=\boxed{\phantom{0}}$ であり，その解は $x=\boxed{\phantom{0}}$ である．

（3）　方程式 ⓐ の異なる実数解が 4 個となるような $k$ の値の範囲は $\boxed{\phantom{0}}$ であり，このときの実数解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とするとき，この 4 つの解の積 $\alpha\beta\gamma\delta$ の値は $\boxed{\phantom{0}}$ である．

**2**　箱の中に $-3$ と書かれたカードが 3 枚，$-2$ と書かれたカードが 2 枚，$-1$ と書かれたカードが 1 枚，1 と書かれたカードが 1 枚，2 と書かれたカードが 2 枚，3 と書かれたカードが 3 枚，合計 12 枚のカードが入っている．この箱の中から同時に 3 枚のカードを取り出し，そのカードに書かれた数字の和を $S$ とする．

（1）　取り出されたカードに書かれた数字がすべて正の値である確率は $\boxed{\phantom{0}}$ であり，取り出されたカードに書かれた数字のうち，少なくとも 1 つが負の値である確率は $\boxed{\phantom{0}}$ である．

（2）　$S=-9$ または $S=9$ となる確率は $\boxed{\phantom{0}}$ である．

（3）　$S=0$ となる確率は $\boxed{\phantom{0}}$ であり，$S>0$ となる確率は $\boxed{\phantom{0}}$ である．

（4）　$S=0$ であったとき，残り 9 枚のカードが入った箱から同時に 2 枚のカードを取り出し，その取り出された 2 枚のカードに書かれた数字の和が 0 である条件付き確率は $\boxed{\phantom{0}}$ である．

**3**　下の図のように，すべての辺の長さが 1 であるような正六角柱 ABCDEF-GHIJKL があり，3 点 A，I，K を含む平面を $\alpha$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{r}$ とするとき，

（1）　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\boxed{\phantom{0}}$, $\vec{p}\cdot\vec{r}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\boxed{\phantom{0}}$ である．

（2）　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ は $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\boxed{\phantom{0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\boxed{\phantom{0}}$

と表せる．また，直線 LC と平面 $\alpha$ の交点を P とすると，P は平面 $\alpha$ 上にあるから，実数 $s, t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AK}}+t\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ とおけるので，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\phantom{0}}\vec{p}+\boxed{\phantom{0}}\vec{q}+\boxed{\phantom{0}}\vec{r}$

と表せる．一方，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$, $\overrightarrow{\mathrm{LC}}$ は $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\boxed{\phantom{0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{LC}}=\boxed{\phantom{0}}$

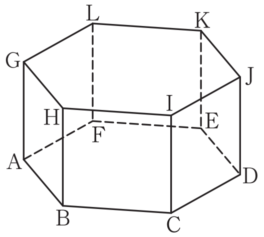
と表せる．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を用いて表すと，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ア}}\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\boxed{\text{イ}}\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

である．ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には $s, t$ を用いず，既約分数を用いて答えよ．また，直線 AP と直線 KI の交点を Q とすると，点 Q は $\boxed{\text{ウ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを下の ⓪～③ の中から 1 つ選べ．

⓪　線分 KI を 2 : 3 に内分する点　　①　線分 KI を 3 : 2 に内分する点

②　線分 KI を 1 : 2 に内分する点　　③　線分 KI を 2 : 1 に内分する点




**4**　先生と大輔さんの二人の会話を読み，次の問いに答えよ．

［問題 1］ すべての実数 $x$ で微分可能である関数 $f(x)$ が次の条件を満たしている．

（ i ） $f'(0)=0$

（ii） すべての実数 $x,\ p$ において等式 $f(x+p)=f(x)+f(p)+2xp-1$ が成り立つ．

（ア） $f(0)$ の値を求めよ．　（イ） $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$ の値を求めよ．　（ウ） 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

大輔：先生，この問題すごく難しそうですね．

先生：そうですね．では，ひとつずつヒントを与えるので，考えてみましょう．

先生：まず，条件（ii）は，等式 $f(x+p)=f(x)+f(p)+2xp-1$ がどんな実数を代入しても成り立つということですね．

大輔：そうか．じゃあ，等式 $f(x+p)=f(x)+f(p)+2xp-1$ に $x=p=$ $\boxed{\text{ア}}$ を代入すると $f(0)$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ とわかりますね．

先生：そのとおり．では次に，（イ）ですね．大輔さんは「微分係数の定義式」は知っていますか ？

大輔：ごめんなさい，覚えていません ⋯．

先生：「微分係数の定義式」は覚えるのではなく，理解するものです．今から教えるので，しっかりと理解しましょう．まず関数 $f(x)$ の $x$ が $a$ から $a+h$ まで変わるときの平均変化率は知ってますか ？

大輔：それは大丈夫です．2 点 $(a,\ f(a))$ と $(a+h,\ f(a+h))$ を結んでできる直線の傾きと同じものですよね？

先生：そうですね．「直線の傾き」というのは大事です．では，その平均変化率において，$h$ を限りなく 0 に近づけると，どのようになるかわかりますか ？

大輔：$a+h$ がどんどん $a$ に近づくので，2 点 $(a,\ f(a))$ と $(a+h,\ f(a+h))$ を結んでできる直線は，点 $(a,\ f(a))$ における接線に近づくし，この点における接線の傾きが微分係数になりますね！

先生：そのとおり！

大輔：はい．そうすると（イ）は（ア）の結果を利用すると，「微分係数の定義式」になっていることがわかるので，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=$ $\boxed{\text{ウ}}$ となりますね．

先生：「微分係数の定義式」が理解できれば，「導関数の定義式」も理解できるので，（ウ）もできるかな？

大輔：「導関数の定義式」は $\boxed{\text{エ}}$ ですか？

先生：そうです．もうこれで（ウ）もできますね．

大輔：できます！先生，ありがとうございました．

（1） $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる値を答えよ．

（2） $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の⓪〜③ のうちから一つ選べ．

⓪ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$　　① $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

② $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{x}$　　③ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x}$

（3） $f'(x)=$ $\boxed{\phantom{0}}$ であり，$f(x)=$ $\boxed{\phantom{0}}$ である．

［問題 2］ 関数 $f(x)$ がすべての実数 $x$ で微分可能であるとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}$$

を $f'(1)$ を用いて表せ．

大輔：この問題も「微分係数の定義式」を利用するんですか ？

先生：そのように見えるようになったってことは，「微分係数の定義式」を理解したってことですね．

大輔：できました！ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}=\boxed{\textbf{オ}}$ ですか？

先生：正解です！これでもうしっかりと理解できましたね．

大輔：はい！ありがとうございます．

（4）$\boxed{\textbf{オ}}$ に当てはまる式を $f'(1)$ を用いて表せ．

［問題 3］　関数 $f(x)$ がすべての実数 $x$ で微分可能であり，$f(2)=8$, $f'(2)=12$ のとき，

$$\lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-x^2f(2)}{x-2}=\boxed{\textbf{カ}}$$

である．

（5）$\boxed{\textbf{カ}}$ に当てはまる値を答えよ．

## 1　数学Ⅱ【指数・対数方程式】標準

**▶解答◀**　（1）$\log_2 x=t$ とおく．

$t^2-3|t|-t=t+k$

$t^2-3|t|-2t=k$ ……………………………①

$k=6$ のとき，① は $t^2-3|t|-2t=6$

$t\geqq 0$ のとき

$t^2-5t-6=0$

$(t-6)(t+1)=0$　　$\therefore\ t=6$

$t\leqq 0$ のとき

$t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0$　　$\therefore\ t=-3$

$x=2^t$ より，$x=2^6,\ 2^{-3}$

すなわち，$x=\mathbf{64},\ \boldsymbol{\frac{1}{8}}$

（2）① の左辺を $f(t)$ とおく．

$t\geqq 0$ のとき

$f(t)=t^2-3t-2t$

$=t^2-5t=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$t\leqq 0$ のとき

$f(t)=t^2+3t-2t$

$=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=k$ の交点を考え，$f(t)=k$ の解が 1 個ある条件は $k=\boldsymbol{-\frac{25}{4}}$ である．図は見やすさを優先して描いてある．このとき $t=\frac{5}{2}$ であるから，求める解 $x$ は

$x=2^{\frac{5}{2}}=\mathbf{4\sqrt{2}}$

（3）$f(t)=k$ の解が 4 個ある条件は $\boldsymbol{-\frac{1}{4}<k<0}$

$t^2+t=k$ の解を $a, b\ (a<b<0)$, $t^2-5t=k$ の解を $c, d\ (0<c<d)$ とする．解と係数の関係より

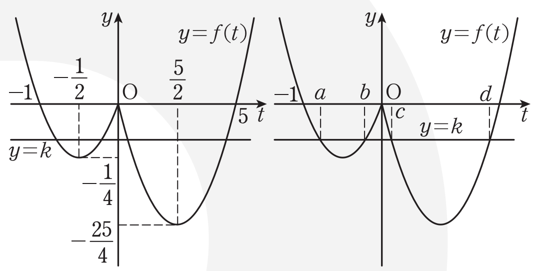
$a+b=-1,\ c+d=5$

$\alpha<\beta<\gamma<\delta$ としてもよい．

$\log_2\alpha=a,\ \log_2\beta=b,\ \log_2\gamma=c,\ \log_2\delta=d$

$\alpha=2^a,\ \beta=2^b,\ \gamma=2^c,\ \delta=2^d$

$\alpha\beta\gamma\delta=2^{a+b+c+d}=2^4=\mathbf{16}$




## 2　数学A【条件付き確率】標準

**▶解答◀**　（1）12 枚から 3 枚取り出すとき，3 枚のカードの組合せは ${}_{12}\mathrm{C}_3=220$ 通りある．正の数字のカードは 6 枚あるから，取り出す 3 枚がすべて正の数字になる確率は

$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{220}=\frac{5\cdot 4}{220}=\boldsymbol{\frac{1}{11}}$

また，少なくとも 1 枚が負の数字になるのは，すべて正のときの余事象であるから，求める確率は

$1-\frac{1}{11}=\boldsymbol{\frac{10}{11}}$

（2）$S=-9$ または $S=9$ となるのは，$-3$ を 3 枚または 3 を 3 枚取り出すときであるから，求める確率は

$\frac{2}{220}=\boldsymbol{\frac{1}{110}}$

（3）$S=0$ となるのは取り出す数字の組合せが $\{-3, 1, 2\}$, $\{3, -1, -2\}$ となるときであるから，その確率は

$\frac{3\cdot 1\cdot 2}{220}+\frac{3\cdot 1\cdot 2}{220}=\frac{6}{220}+\frac{6}{220}=\boldsymbol{\frac{3}{55}}$

12 枚のカードは符号の異なる絶対値の等しい数字が同じ枚数あるから，$S>0$ になる確率と $S<0$ になる確率

は等しい．よって $S>0$ になる確率は

$$\left(1-\frac{3}{55}\right)\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{26}{55}}$$

（4） $S=0$ となる事象を $A$，2 回目に取り出す 2 枚の数字の和が 0 となる事象を $B$ とすると，（3）より

$$P(A)=\frac{3}{55}$$

1 回目に $\{-3,\ 1,\ 2\}$ を取り出すとき（確率 $\frac{6}{220}$）残りの 9 枚は

$$-3,\ -3,\ -2,\ -2,\ -1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3$$

であり，ここから取り出す 2 枚の数字の和が 0 になるのは $\{-3,\ 3\}$, $\{-2,\ 2\}$ のときであるから，その確率は

$$\frac{2\cdot3+2\cdot1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

1 回目に $\{3,\ -1,\ -2\}$ を取り出すとき残りの 9 枚は $3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ -2,\ -3,\ -3,\ -3$ であり，同じ確率になるから

$$P(A\cap B)=\frac{6}{220}\cdot\frac{2}{9}+\frac{6}{220}\cdot\frac{2}{9}=\frac{3}{55}\cdot\frac{2}{9}$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{55}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{55}}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

**注意** （4） 1 回目に $\{-3,\ 1,\ 2\}$ を取り出しても，$\{3,\ -1,\ -2\}$ を取り出しても，その後取り出す 2 枚の数字の和が 0 になる確率は $\frac{2}{9}$ であるから，求める条件付き確率は $\boldsymbol{\frac{2}{9}}$ である．

## 3

**数学B**【ベクトルと図形（空間）】**標準**

**▶解答◀** （1） $\angle\mathrm{BAF}=120^\circ$ より

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=1\cdot1\cdot\cos120^\circ=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{r}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\mathbf{0}$$

（2） 正六角形 ABCDEF の対角線の交点を O とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EK}}$$
$$=(\vec{p}+\vec{q})+\vec{q}+\vec{r}=\boldsymbol{\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CI}}$$
$$=(\vec{p}+\vec{q})+\vec{p}+\vec{r}=\boldsymbol{2\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}$$

図1

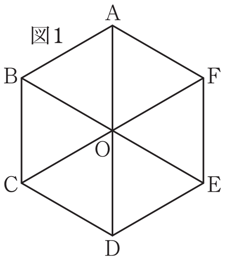
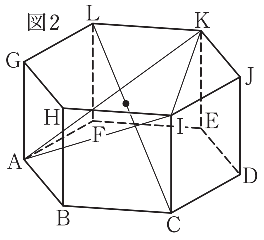



図2




$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AK}}+t\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ とおくとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s(\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r})+t(2\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})$$
$$=\boldsymbol{(s+2t)\vec{p}+(2s+t)\vec{q}+(s+t)\vec{r}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FL}}=\boldsymbol{\vec{q}+\vec{r}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AL}}$$
$$=(2\vec{p}+\vec{q})-(\vec{q}+\vec{r})=\boldsymbol{2\vec{p}-\vec{r}}$$

であるから，LC 上の点 P は実数 $u$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AL}}+u\overrightarrow{\mathrm{LC}}=\vec{q}+\vec{r}+u(2\vec{p}-\vec{r})$$
$$=2u\vec{p}+\vec{q}+(1-u)\vec{r}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

と表せる．① と ② を係数比較して

$$s+2t=2u,\ 2s+t=1,\ s+t=1-u$$

これを解いて $s=\frac{2}{5}$, $t=\frac{1}{5}$, $u=\frac{2}{5}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{2}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\boldsymbol{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}}{3}$$

よって AP と KI の交点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}}{3}$ と表されるから，Q は**線分 KI を 1：2 に内分する点**である．

## 4

**数学Ⅱ**【微分係数と導関数】**標準**

**▶解答◀** （1） 任意の実数 $x$, $p$ で

$$f(x+p)=f(x)+f(p)+2xp-1\ \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

が成り立つから，$x=p=\mathbf{0}$ を代入すると

$$f(0)=f(0)+f(0)-1\qquad\therefore\quad f(0)=\mathbf{1}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=\mathbf{0}$$

（2） $f'(x)=\boldsymbol{\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

（3） ① で $p=h$ とすると

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+2xh-1$$

よって，$h\neq0$ のとき

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x+\frac{f(h)-1}{h}$$

であるから，（2）の導関数の定義式を用いて

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\left(2x+\frac{f(h)-1}{h}\right)=2x+0=\boldsymbol{2x}$$

$C$ を定数として，$f(x)=x^2+C$

$f(0)=1$ より $C=1$ であるから $f(x)=\boldsymbol{x^2+1}$

（4） $\dfrac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}$

$$=\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}-\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\cdot(-3)$$
$$-\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2$$

微分係数の定義から

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}$$

$$=-3f'(1)-2f'(1)=\boldsymbol{-5f'(1)}$$

（5）$x-2=h$ とおくと

$$\frac{4f(x)-x^2f(2)}{x-2}=\frac{4f(2+h)-(2+h)^2f(2)}{h}$$

$$=4\cdot\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-(4+h)f(2)$$

$x\to 2$ のとき $h\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-x^2f(2)}{x-2}=4f'(2)-4f(2)$$

$$=4\cdot 12-4\cdot 8=\mathbf{16}$$

**♦別解♦**（5）$g(x)=4f(x)-x^2f(2)$ とおく．

$$g'(x)=4f'(x)-2xf(2)$$

$g(2)=0$ であるから，微分係数の定義より

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

$$=4f'(2)-4f(2)=4\cdot 12-4\cdot 8=\mathbf{16}$$

**要の分析**　昨年同様，空欄補充の形式であり，最後の問題は会話文である．ただし大問の数は1問減っていて，内容的にも昨年より易しくなっている．

（中郁，楊，染矢，安田亨）