福岡大学・医学部-推薦

試験日 2022 年 11 月 27 日 時間 60 分（英語と合わせて） 数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1 （1） 座標平面において，$\mathrm{A}(0, 5)$ とし，点 $(0, 2)$ を中心とし半径が 2 である円を C とする．点 P が C 上を動くとき，線分 AP を 1：2 に外分する点の軌跡が直線 $y = 2x + 6$ を切り取ってできる線分の長さは $\boxed{}$ である．

（2） $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sqrt{2}\sin x + 2\cos x + \sqrt{2}\sin 2x + 1 \leqq 0$ の解は $\boxed{}$ である．

（3） i を虚数単位とし，a, b, c を 1 以上 6 以下の整数とする．等式
$\cos\dfrac{2(a-b+c)\pi}{5} + i\sin\dfrac{2(a-b+c)\pi}{5} = 1$ が成り立つような (a, b, c) の総数は $\boxed{}$ である．

（4） a, b を異なる実数とし，実数 α, β は $\beta < 0 < \alpha$ を満たすとする．2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を条件
$a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n, b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$ によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \boxed{}$ である．

2 座標平面において，2 曲線 $y = \log x$, $y = \log(x+1)$ と直線 $x = 2$ および x 軸で囲まれた図形を D とするとき，次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

（1） 図形 D の面積を求めよ．

（2） 図形 D を，y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

1

（1） 数学Ⅱ 【軌跡】 標準

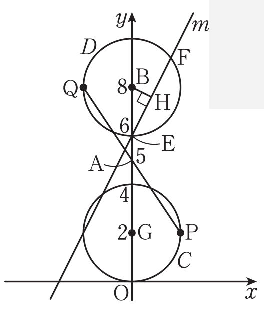
▶解答◀ 線分 AP を 1：2 に外分する点を Q とおく．2 点 P，Q の中点が $\mathrm{A}(0, 5)$ であるから，点 P が動く円 C と点 Q の軌跡 D は，点 A に関して対称の位置にある．

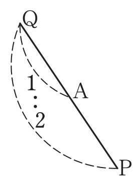
円 C の中心が $\mathrm{G}(0, 2)$ であるから，軌跡 D は中心 $\mathrm{B}(0, 8)$，半径 2 の円である．円 D と直線 $m : y = 2x+6$ の 2 交点を E，F とし，EF の中点を H とする．点と直線の距離の公式より

$$\mathrm{BH} = \frac{|0+6-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

であるから

$$\mathrm{EF} = 2\mathrm{EH} = 2\sqrt{2^2 - \mathrm{BH}^2} = 2\sqrt{4 - \frac{4}{5}} = \boldsymbol{\frac{8}{\sqrt{5}}}$$



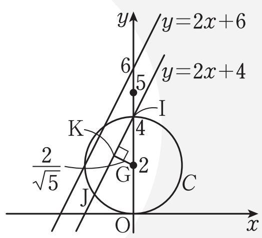


注意 点 $\mathrm{A}(0, 5)$ に関して対称に移すだけだから D の式など不要である．むしろ $y = 2x + 6$ を A に関して対称に移した直線 $y = 2x + 4$ と C との 2 交点 I，J（その中点を K とする）を考え

$$\mathrm{GK} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{IJ} = 2\mathrm{IK} = 2\sqrt{2^2 - \frac{4}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

とする方がよい．



（2） 数学Ⅱ 【三角関数の不等式】 標準

▶解答◀ $\sqrt{2}\sin x + 2\cos x + \sqrt{2}\sin 2x + 1 \leqq 0$

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x + \sqrt{2}\sin x + 2\cos x + 1 \leqq 0$$

$$\sqrt{2}\sin x(2\cos x + 1) + (2\cos x + 1) \leqq 0$$

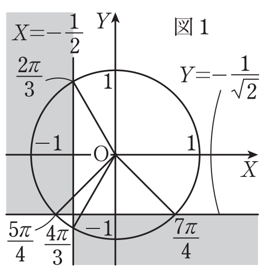
$$(\sqrt{2}\sin x + 1)(2\cos x + 1) \leqq 0$$

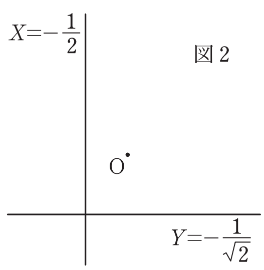
$X = \cos x, Y = \sin x$ とおくと

$$(\sqrt{2}Y + 1)(2X + 1) \leqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\text{①}$$

この不等式を満たす x の値の範囲は，図 1 の単位円周上の網目部分の偏角となる．求める値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi}$$





注意 ①の図示について：図2を見よ．まず2直線 $X=-\dfrac{1}{2}$，$Y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で分けられた4つの領域について，$(X, Y)=(0, 0)$ を $(\sqrt{2}Y+1)(2X+1) \leqq 0$ に代入すると $1 \leqq 0$ で成立しないから $(0, 0)$ は不適であり，$(0, 0)$ を含む部分は不適．あとは境界を交点ではなく線でとびこえるたびに適，不適をくり返す．

（3） **数学Ⅲ**【複素数の極形式】**標準**

▶解答◀

$$\cos\frac{2(a-b+c)\pi}{5}+i\sin\frac{2(a-b+c)\pi}{5}=1$$

が成り立つとき

$$\frac{2(a-b+c)\pi}{5}=2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$a-b+c=5n$$

$$a+c=5n+b$$

$b=1, 2, 3, 4, 5$ のとき，これを，$a+c$ を5で割った余りが b（$b=5$ のときは，本当の余りは0だが）と読むと，任意の (a, c)（36通りある）に対して b はそれぞれただ1つに定まる．

$b=6$ のとき $a+c=5n+6$ の形になるのは $a+c=6$，$a+c=11$ のときで $(a, c)=(1, 5), (2, 4), \cdots, (5, 1)$ の5通りと $(5, 6), (6, 5)$ の2通りがあり，(a, b, c) の総数は $36+5+2=\mathbf{43}$ である．

注意 【良い問題文】

普通なら「サイコロを3回投げる．目の出方は何通りあるか」と書くところだが，こうした悪文を避けようという配慮がある．「悪文」の理由は，「サイコロを投げる」は「サイコロを振る，サイコロをころがす」の誤訳だし（思いきり投げたら見つからない），目の出方などという曖昧な日本語はやめるべきだからである．たとえば，サイコロのカドを支点にしてクルクル回り続けるという，変わった「出方」もあろう．

（4） **数学Ⅲ**【数列の極限】**標準**

▶解答◀ $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta b_n$ ……………………①

$b_{n+1}=\beta a_n+\alpha b_n$ ……………………②

①＋②から

$$a_{n+1}+b_{n+1}=(\alpha+\beta)(a_n+b_n)$$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は公比 $\alpha+\beta$ の等比数列であるから

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)(\alpha+\beta)^{n-1}$$

$a_n+b_n=(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1}$ ……………………③

①－②から

$$a_{n+1}-b_{n+1}=(\alpha-\beta)(a_n-b_n)$$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 $\alpha-\beta$ の等比数列であるから

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)(\alpha-\beta)^{n-1}$$

$a_n-b_n=(a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}$ ……………………④

③＋④から

$$2a_n=(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1}+(a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}$$

③－④から

$$2b_n=(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1}-(a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}$$

したがって

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1}+(a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}}{(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1}-(a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}}$$

$$=\frac{(a+b)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{n-1}+(a-b)}{(a+b)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{n-1}-(a-b)}$$

ここで，$\beta<0<\alpha$ であるから

$$\alpha-\beta-(\alpha+\beta)=-2\beta>0$$

$$\alpha+\beta-\{-(\alpha-\beta)\}=2\alpha>0$$

である．したがって

$$-(\alpha-\beta)<\alpha+\beta<\alpha-\beta$$

$$-1<\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}<1$$

であり，$a \neq b$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{0+(a-b)}{0-(a-b)}=\mathbf{-1}$$

注意 【三角不等式】

実数 x, y に対し

$$|x+y| \leqq |x|+|y|$$

が成り立つ．等号は x, y が同符号（0はすべての実数に対して同符号とする）のときに成り立つ．

$$|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|=\alpha-\beta=|\alpha-\beta|$$

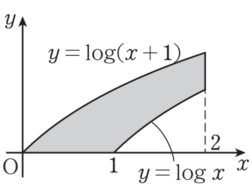
（α, β は異符号だから等号は成立しない）

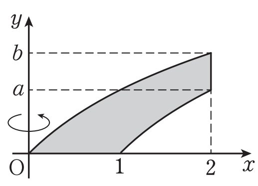
$$\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|<1$$

2

数学Ⅲ【体積】**標準**

▶解答◀ （1） 求める面積を S とする．





$$S=\int_0^2 \log(x+1)\,dx-\int_1^2 \log x\,dx$$

$$=\Big[\,(x+1)\log(x+1)-x\,\Big]_0^2-\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^2$$

$$=3\log 3-2-(2\log 2-1)$$

$$=\mathbf{3\log 3-2\log 2-1}$$

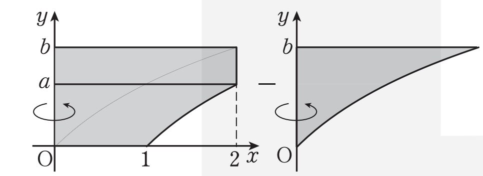
(2) 求める体積を V とする．バウムクーヘン分割を用いる．

$$V=\int_0^2 2\pi x\log(x+1)\,dx-\int_1^2 2\pi x\log x\,dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=\int_0^2(x^2-1)'\log(x+1)\,dx\\
&\qquad-\int_1^2(x^2)'\log x\,dx\\
&=\Big[\,(x^2-1)\log(x+1)\,\Big]_0^2\\
&\qquad-\int_0^2(x^2-1)\{\log(x+1)\}'\,dx\\
&\qquad-\Big[\,x^2\log x\,\Big]_1^2+\int_1^2 x^2(\log x)'\,dx\\
&=3\log 3-4\log 2-\int_0^2(x^2-1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\
&\qquad+\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\\
&=3\log 3-4\log 2-\int_0^2(x-1)\,dx+\int_1^2 x\,dx\\
&=3\log 3-4\log 2-\Big[\,\frac{x^2}{2}-x\,\Big]_0^2+\Big[\,\frac{x^2}{2}\,\Big]_1^2
\end{aligned}$$

$$V=\boldsymbol{\left(3\log 3-4\log 2+\frac{3}{2}\right)\pi}$$

【♦別解♦】 **(2)** $a=\log 2,\ b=\log 3$ とおく．
$y=\log x$ のとき $x=e^y$
$y=\log(x+1)$ のとき $e^y=x+1$



$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=2^2(b-a)+\int_0^a(e^y)^2\,dy-\int_0^b(e^y-1)^2\,dy\\
&=4(b-a)+\int_0^a e^{2y}\,dy-\int_0^b(e^{2y}-2e^y+1)\,dy\\
&=4(b-a)+\Big[\,\frac{e^{2y}}{2}\,\Big]_0^a-\Big[\,\frac{e^{2y}}{2}-2e^y+y\,\Big]_0^b\\
&=4(b-a)+\frac{e^{2a}-1}{2}\\
&\qquad-\left(\frac{e^{2b}-1}{2}-2e^b+b+2\right)
\end{aligned}$$

$a=\log 2,\ b=\log 3$，$e^a=2,\ e^b=3$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=4(\log 3-\log 2)+\frac{3}{2}\\
&\qquad-(4-6+\log 3+2)
\end{aligned}$$

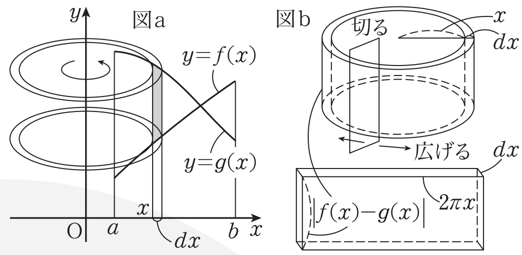
$$V=\boldsymbol{\left(3\log 3-4\log 2+\frac{3}{2}\right)\pi}$$

注意 1°【バウムクーヘン分割】

$0\leqq a<b$ のとき，$a\leqq x\leqq b$ において，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の間にある部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V は

$$V=\int_a^b 2\pi x\left|\,f(x)-g(x)\,\right|\,dx$$

で与えられる．



$x\sim x+dx$ の部分を回転してできる微小部分を縦に切って広げる（図 b）．和食の料理人が行う大根の桂剥き（かつらむき）を想像せよ．これを直方体で近似する．直方体の 3 辺の長さは

$$dx,\ 2\pi x,\ \left|\,f(x)-g(x)\,\right|$$

であり，微小体積 dV は

$$dV=2\pi x\left|\,f(x)-g(x)\,\right|\,dx$$

となる．

2°【e の上に log をのせない】

$\dfrac{e^{2\log 2}-1}{2}$ で止まる生徒が多い．模試によっては答案の 4 割くらいがこの形である．そして，そのことを知らない大人は多い．$\Big[\,\dfrac{e^{2y}}{2}\,\Big]_0^{\log 2}=\dfrac{4-1}{2}$ とあっさり板書するようではいけない．原稿では常にこれを頭に置いて書かないといけない．改善するための 1 つの方法は，$e^{\log x}=x$ を繰り返し強調し，板書や原稿では，私のように置き換えるのである．$a=\log 2$ としておけば $e^a=2$ であり，e^a がでてきたら 2 にすればよい．

要の分析 **1**（3）は難しい．（4）は $(\alpha+\beta)^{n-1}$ と $(\alpha-\beta)^{n-1}$ の勝負をすることに気づきにくい．**2** も，体積をたしたりひいたりにとまどう人もあろう．意外に差のつく問題である．英語と合わせて 60 分など，驚きという他ない．

（中路，長島，荻原，安田亨）