福岡大学・医学部-推薦

試験日　2024 年 11 月 24 日

1. 次の $\boxed{}$ をうめよ．答は解答用の該当欄に記入せよ．

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ と直線 $y=-2x+2$ の交点を P，Q とする．
このとき，線分 PQ の長さは $\boxed{(1)}$ である．

(2) 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和が 3 で割り切れる確率は $\boxed{(2)}$ である．

(3) △OAB に対して，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を E，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を F とする．線分 CF と線分 DE の交点を P，直線 OP と辺 AB の交点を Q とする．このとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}=\boxed{(3)}$ である．

(4) 不等式 $\log_2(4-x^2-y^2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<1$ が成り立つとき，$x-y$ の値の範囲は $\boxed{(4)}$ である．

2. （記述問題）

定数 a，b が $0<b<a$ を満たしているとする．
関数 $f(x)=\cos(a\sqrt{x-1}+b)$ について，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)}{\sqrt{x-1}}=-\pi$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ．

(2) (1) のとき，定積分 $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(1) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ …①, $y=-2x+2$ …②

①②を連立してyを消去すると

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(-2x+2)^2}{8}=1.$$

$$x^2+(x-1)^2=2.$$

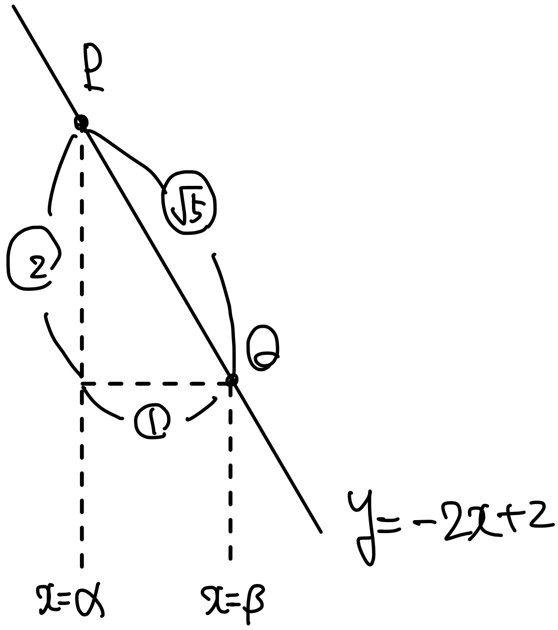
$$2x^2-2x-1=0.$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

$\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ とおくとき.

直線②の傾きが-2だから

$$PQ=(\beta-\alpha)\times\sqrt{1^2+(-2)^2}=\boxed{\sqrt{15}}.$$



(2) 1つのさいころの目を3で割った余りは0または1または2であり、これらは同様に確からしい。

2つのさいころの出る目の和が3で割り切れるのは、それぞれのさいころの出目を3で割った余りをr_1, r_2とおくと

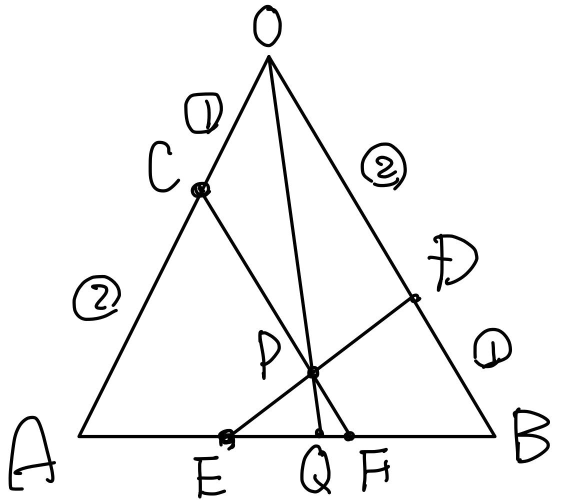
$(r_1, r_2)=(0,0),(1,2)(2,1)$

のときのみ。したがって

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}.$$

r_2 \ r_1	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

(3)



△OAQと直線CFでメネラウスの定理を用いて

$$\frac{OC}{CA}\times\frac{AF}{FQ}\times\frac{QP}{PO}=1$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{AF}{FQ}\times\frac{QP}{PO}=1 \quad \text{—①}$$

△OQBと直線DEでメネラウスの定理を用いて.

$$\frac{OP}{PQ}\times\frac{QE}{EB}\times\frac{BD}{DO}=1$$

$$\frac{OP}{PQ}\times\frac{QE}{EB}\times\frac{1}{2}=1 \quad \text{—②}$$

①×②より

$$\frac{1}{4}\times\frac{AF}{FQ}\times\frac{QE}{EB}=1$$

$$AF\times QE=4FQ\times EB$$

$AE=EF=FB$より $QE=4FQ$

よって

$$QE=AB\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}AB$$

$$FQ=AB\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}AB$$

であり $AF:FQ=\frac{2}{3}AB:\frac{1}{15}AB$

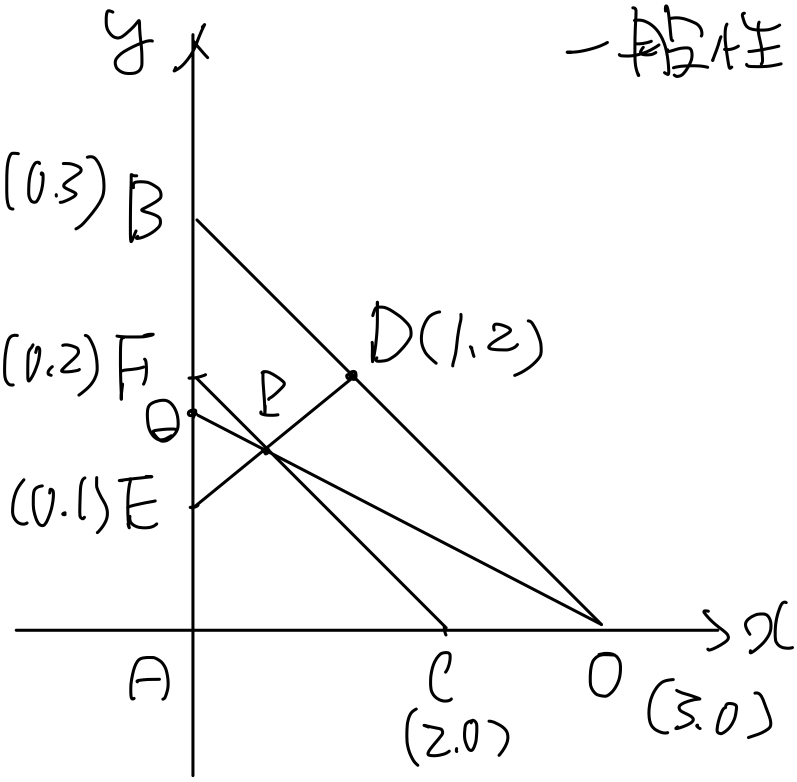
$=10:1$

①より $\frac{QP}{PO}=\frac{1}{5}$

$\therefore\ \frac{OP}{OQ}=\boxed{\frac{5}{6}}$

(別解1)

O(3,0) A(0,0) B(0,3) としてxy座標平面上で考えても一般性を失わない



CF : $y=-x+2$

DE : $y=x+1$

よって $P\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

よって OP:OQ はx座標の差を考えて

$$\frac{OP}{OQ}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

(別解2)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく

点CはOAを1:2に内分するので，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{a}$.

点DはOBを2:1に内分するので，$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\vec{b}$.

点E 点FはABを1:2, 2:1にそれぞれ内分するので

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

点PはCF上にあるから $\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OF}$ とおけて.

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1-s}{3}\vec{a}+s\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2s}{3}\vec{b}. \quad \text{——①}$$

点PはDE上にあるから $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}$ とおけて

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2(1-t)}{3}\vec{b}+t\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{2t}{3}\vec{a}+\frac{2-t}{3}\vec{b}. \quad \text{——②}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立なので ①.② より

$$\begin{cases} \frac{1}{3}=\frac{2t}{3}, \\ \frac{2s}{3}=\frac{2-t}{3}. \end{cases} \qquad \therefore t=\frac{1}{2},\ s=\frac{3}{4}$$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

またQはOP上にあるから $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ とおけて

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}.$$

QはAB上にあるから　$\frac{k}{3}+\frac{k}{2}=1 \quad \therefore k=\frac{6}{5}.$

したがって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{6}{5}\overrightarrow{OP}.$

よって　$\frac{OP}{OQ}=\boxed{\frac{5}{6}}$

(4) $\log_2(4-x^2-y^2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<1$

真数条件より

$4-x^2-y^2>0$, $x+1>0$.

$\therefore \begin{cases} x^2+y^2<4 \\ x>-1 \end{cases}$ —①

このとき $\log_2(4-x^2-y^2)<\log_2 2(x+1)$.

底が1より大きいので

$4-x^2-y^2<2(x+1)$.

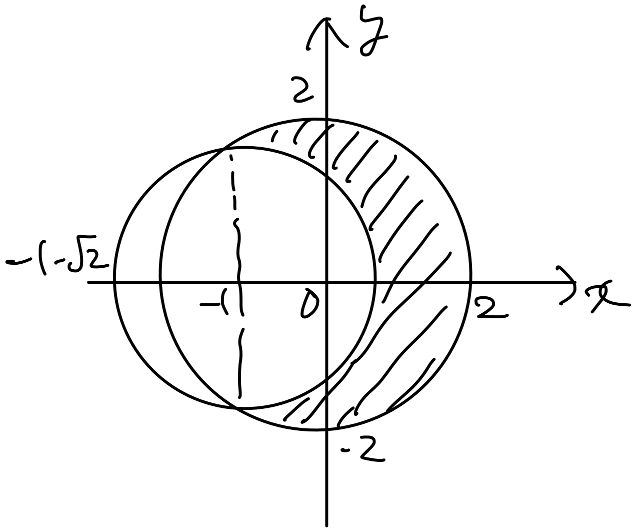
$x^2+2x+y^2>2$.

$(x+1)^2+y^2>3$. —②

①.②の不等式を満たす(x.y)は

xy平面上で、図の斜線部にある。

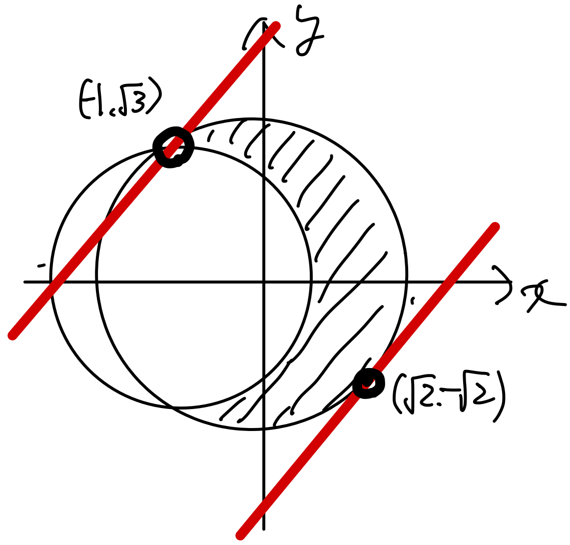
(ただし境界除く)



$x-y=k$とおくと

$y=x-k$

これは傾き1, y切片が$-k$の直線を表す。この直線が図の領域と共有点をもつ条件を調べる。



kの上限

y切片の下限を調べればよいので点$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$を通るときを考えて

$k=x-y=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{2}$

kの下限

点$(-1,\sqrt{3})$を通るときを考えて

$k=x-y=(-1)-\sqrt{3}$

$=-1-\sqrt{3}$

したがって

$$\boxed{-1-\sqrt{3}<k<2\sqrt{2}}$$

(1)

$g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x-1}}$, $h(x) = \sqrt{x-1}$ とおく

$\displaystyle\lim_{x \to 1+0} g(x) = -\pi$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} h(x) = 0$ より

$$\lim_{x \to 1+0} g(x) \times h(x) = -\pi \times 0 = 0$$

つまり $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} f(x) = 0$ が必要である

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \cos b = 0 \quad \text{——①}$$

ここで $\sqrt{x-1} = t$ とおく. $x \to 1+0$ のとき $t \to +0$

$$g(x) = \frac{\cos(a\sqrt{x-1}+b)}{\sqrt{x-1}} = \frac{\cos(at+b)}{t}$$

$$= \frac{\cos(b+at) - \cos b}{at} \times a$$

ここで $F(x) = \cos x$ とおくとき

$$\lim_{t \to +0} \frac{F(b+at) - F(b)}{at} = F'(b) = -\sin b$$

したがって.

$$\lim_{x \to 1+0} g(x) = -a\sin b = -\pi.$$

①から $\sin b = 1$ or -1 であり $a > 0$ より

$a = \pi$. $\sin b = 1$.

$0 < b < a$ より $(a, b) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ //

(2) (1)より

$f(x) = \cos\left(\pi\sqrt{x-1} + \frac{\pi}{2}\right)$

$x-1=t$ とおいて $dx = dt$

$x: 1 \longrightarrow 5$ のとき $t: 0 \rightarrow 4$

$f(x) = \cos\left(\pi\sqrt{t} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\pi\sqrt{t}$

$\sqrt{t} = u$ とおいて $t: 0 \rightarrow 4$ のとき $u: 0 \rightarrow 2$

$t = u^2 \quad \therefore dt = 2u\,du$

$(与式) = \int_0^4 -\sin\pi\sqrt{t}\,dt = -\int_0^2 \sin\pi u \cdot 2u\,du$

$= -2\int_0^2 u\sin\pi u\,du$

$= 2\int_0^2 u\left(\frac{1}{\pi}\cos\pi u\right)'du$

$= \left[2u \cdot \frac{1}{\pi}\cos\pi u\right]_0^2 - 2\int_0^2 \frac{1}{\pi}\cos\pi u\,du$

$= \frac{4}{\pi} \cdots (ii)$

講評.

1.

(1) は平易. 2点間のキョリを求めるのではなく,「傾きが既知の直線の2点」だから, x座標の差を求めて, 比で計算すること。

(2) は平易. さいころ2つは区別して考える. 6個の目で考えてもよいが, 3で割った余りの3通りに注目すると速い。

(3) はやや易. 考える方法によって計算量が変わる. ベクトルで設定してもよいが, 座標や, メネラウスの定理が使えると楽になる.

(4) は標準. 真数条件や底の変換など, 対数の計算は丁寧に。最後は領域と最大最小問題にたどり着く. 大事なテーマだがミスが生じやすく, 差がつくだろう.

2.

(1) はやや難. 極限値が存在する条件から a, b を求める問題. a, b に範囲が与えられていないのだが, 最初から $b=\frac{\pi}{2}$ と決めつけてしまう受験生も多かったのではないか. b を求めるなら後半は $b=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $b=\frac{\pi}{2}+(2k-1)\pi$ の2通りに場合分けをしなければならない。

(2) は標準. 複雑に見えるが, 少しずつ置換していくと部分積分にたどりつけるだろう.

1は最終解答のみなので, 1つのミスが命とりになりそう。
2.も全体的には標準レベルなので丁寧に解き切って欲しい。
英語と合わせて60分であることを考えれば, 合格ラインは60~65%程度だろう.