杏林大学-医学部

1. i を虚数単位とする．整式 $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+1$ について，以下の問いに答えよ．

（1） 定数 k に対し，4 次方程式 $f(x)=k$ が異なる 4 つの実数解をもつのは，$k_1<k<k_2$ のときである．

ただし，$k_1=\dfrac{\square}{\square}$, $k_2=\square$ である．

4 次方程式 $f(x)=k_1$ は異なる 3 つの実数解をもち，このうち重解以外の 2 つの解の和は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） $x=\sqrt{2}i-1$ は 2 次方程式 $g(x)=x^2+\square x+\square=0$ の解であり，$f(x)$ を 2 次式 $g(x)$ で割った余りは $\square x+\square$ である．したがって，

$$f(\sqrt{2}i-1)=-\square+\square\sqrt{2}i$$

となる．

（3） 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+b$ が異なる 2 点で接するとき，接点の x 座標を α,β として

$$f(x)-(ax+b)=3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

と表すことができる．両辺の x の各次数の係数を比較することで

$$\alpha+\beta=-\frac{\square}{\square},\ \alpha\beta=-\frac{\square}{\square}$$

であることがわかり，$a=\dfrac{\square}{\square}$, $b=\dfrac{\square}{\square}$ となる．

2. 定数 a,b に対し，関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}} & (x\geqq 0\text{ のとき})\\[2mm] \dfrac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x} & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとして，以下の問いに答えよ．

（1） $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき $\tan x<x<\sin x$ が成り立つことを利用すると，

$$\lim_{x\to-0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\square$$

となることがわかる．

（2） $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\frac{b}{\square}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\square$ であるので，関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であることから，

$b=\square$ とわかる．また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\frac{a}{\square}$ であり，設問（1）の結果を利用すると $\displaystyle\lim_{x\to-0}f'(x)=\frac{\square}{\square}$ と

なるので，関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることから，$a=\square$ と定まる．

（3） 曲線 $y=f(x)$ の $x=0$ における接線の式は $y=\dfrac{\square}{\square}x+\square$ である．この接線と曲線 $y=f(x)$ の

交点のうち，$x>0$ を満たす点の x 座標を u とする．$u=\dfrac{\square}{\square}$ であり，

$$\int_0^u f(x)\,dx=\square-\square\sqrt{\square}+\square\log_e\frac{\square+\sqrt{\square}}{\square}$$

が成り立つ．ただし，e は自然対数の底である．

3. 座標空間において，x 軸および y 軸からの距離が共に 1 であるような点全体の集合を L とし，L と xy 平面との交点のうち，第 1〜4 象限にある点を順に A，B，C，D とする．また，L と z 軸との交点のうち，z 座標が正である点を E，負である点を F とする．

x 軸および y 軸からの距離が共に 1 以下であるような点全体の集合から，八面体 E − ABCD − F の内部を除

いてできる立体を K として，以下の問いに答えよ．

（1） L は原点を中心とする 2 つの楕円からなり，このうち点 A を通る楕円の内部の面積は $\sqrt{\square}\pi$ である．K に属する点のうち，x 軸からの距離が 1 であるような領域の展開図は 2 つの正弦曲線で囲まれた図形であり，その面積は $\square$ である．

立体 K を $z=t$（ただし $-1 \leqq t \leqq 1$）で表される平面で切ってできる断面の面積は $\square t^2 + \square|t|$ であり，K の体積は $\dfrac{\square}{\square}$ となる．

立体 K を $x=u$（ただし $0<u<1$）で表される平面で切ってできる断面の面積 S は，$u=\cos\theta,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ を用いて

$$S = \square\theta + \sin\left(\square\theta\right) + \cos\left(\square\theta\right) - \square$$

と書くことができる．S は $u=\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{\square}$ をとる．

（2） 八面体 E $-$ ABCD $-$ F の辺を通って 1 秒ごとに隣接する頂点に移動する動点 P を考える．点 P が xy 平面上のいずれかの頂点から 1 秒後に点 E に移動する確率は $\dfrac{1}{3}$，点 F に移動する確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとし，八面体のいずれかの頂点から 1 秒後に点 E，F 以外の隣接する頂点の 1 つに移動する確率は $\dfrac{1}{4}$ であるとする．時刻 $t=0$ において点 E に存在した動点 P が，n 秒後に点 E に存在する確率を p_n，点 F に存在する確率を q_n とすると，自然数 n に対し

$$p_{n+1} = \frac{\square}{\square}(1-p_n-q_n),\quad q_{n+1} = \frac{\square}{\square}(1-p_n-q_n)$$

が成り立つ．このとき，動点 P が 4 秒後に点 A に存在する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，点 F に存在する確率が最も高くなるのは $\square$ 秒後で，その確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．また，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\square}{\square}$$

が成り立つ．