2025年1月25日　実施

関西医科大学

医学部　一般　数学

解答速報

1. 解答・解説

(1) 図1より C上の点 (r, θ) に対して

$r = 2\cos\theta$ である。

図1

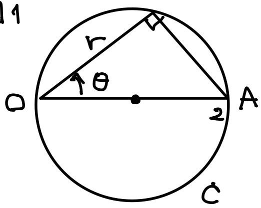


図2

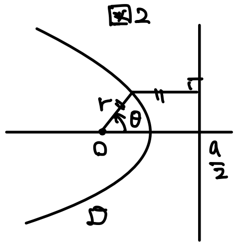


図2より、$a>0$ のときは

D上の点 (r, θ) に対して

$$r = \frac{a}{2} - r\cos\theta$$

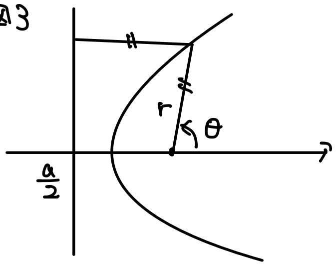
$$r = \frac{a}{2(1+\cos\theta)}$$

図3より、$a<0$ のときは

$$r = -\frac{a}{2} + r\cos\theta$$

$$r = \frac{-a}{2(1-\cos\theta)}$$

図3



(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立し、

$$2\cos x = \frac{k}{2(1-\cos x)}$$

$$k = 4(1-\cos x)\cos x$$

$c = \cos x$ とおくと、

$c=-1$ のときは x は1つ、

$-1<c<1$ のときは x が2つ

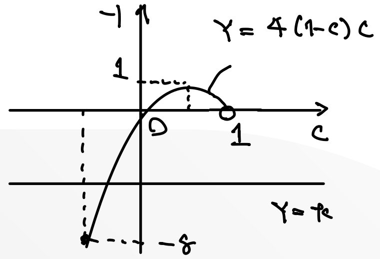
対応する。

$$k = 4(1-c)c$$

$$k = 1 - 4\left(c - \frac{1}{2}\right)^2$$

$Y=k$ と $Y=4(1-c)c$ $(-1 \leqq c < 1)$

の共有点を考える。



これより $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の

共有点の個数は

$k<-8$, $1<k$ のとき 0

$k=-8$ のとき 1

$-8<k\leqq 0$, $k=1$ のとき 2

$0<k<1$ のとき 4

別解　(2) [微分する]

(*) のあとは微分してもよい。

$F(x) = 4\cos x(1-\cos x)$ とおいて、

$$F'(x) = 4\{-\sin x(1-\cos x) + \cos x\sin x\}$$

$$= 4\sin x(2\cos x - 1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

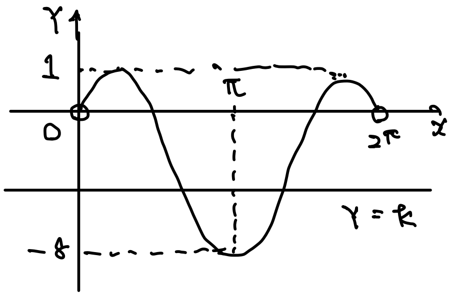
$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

$F(\pi) = -4 \cdot 2 = -8$

$F\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

$F(0) = F(2\pi) = 0$

これより $y = F(x)$ のグラフは次のようになる。



$y = k$ との共有点の個数を考えて、

$k < -8,\ 1 < k$ のとき 0

$k = -8$ のとき 1

$-8 < k \leqq 0,\ k = 1$ のとき 2

$0 < k < 1$ のとき 4

2.

(1) $(n-m)(n+m) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

$n+m > n-m > 0$ で，さらに

$$(n-m)+(n+m) = 2n$$

であるから，$n-m$ と $n+m$ の偶奇は等しい．これより $n-m$，$n+m$ は共に素因数 2 をもつ．残りの $2 \cdot 11 \cdot 23$ の約数は $2^3 = 8$ 個より，$n-m < n+m$ となる組は $\frac{8}{2} = 4$通りある

(2) (1) と同様に考える．

$$(n-m)(n+m) = 3^4 \cdot 5^2$$

$n-m$，$n+m$ はともに奇数で，$3^4 \cdot 5^2$ の約数は $5 \cdot 3 = 15$ 個（そのうち1つは 45 で，$2025 = 45^2$）あるから，

$n-m < n+m$ を満たす組は $\frac{15-1}{2} = 7$通りある．

(3) m から n までの自然数の和が 2025 になるとき，

$$\frac{1}{2}(m+n)(n-m+1) = 2025$$

$$(n+m)(n-m+1) = 2 \cdot 3^4 5^2$$

$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ の約数の個数は $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ 個あるから，$n+m > n-m+1 > 1$ 満たす組は $\frac{30}{2} - 1 = 14$通りある

注 (1) $n-m = 2a$，$n+m = 2b$（ただし，$ab = 2 \cdot 11 \cdot 23$）とすると，$n = a+b$，$m = b-a$ となるから，a, b は $2 \cdot 11 \cdot 23$ の正の約数と対応し，$a < b$ である．

3.

(1) $n+1$ 回目に勝つのは n 回目まで引き分けで，$n+1$ 回目に 1 が出るときであるから，

$$a_{n+1} = \frac{1}{m}c_n \quad \cdots ①$$

である．また，$n+1$ 回目に負けるのは，n 回目まで引き分けで $n+1$ 回目に n 回目の目（これは 1 でも $n-1$ 回目の目でもない）と同じものが出るときで，

$$b_{n+1} = \frac{1}{m}c_n \quad \cdots ②$$

①，② より $n \geqq 1$ において

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 0$$

である．また，$a_1 = \frac{1}{m}$，$b_1 = 0$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = a_1 - b_1 = \frac{1}{m}$$

(2) $c_n = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} \quad \cdots ③$

であるから，$n \geqq 1$ で

$$a_{n+1} + b_{n+1} = c_n - c_{n+1}$$

となり，$c_1 = 1 - \frac{1}{m}$ も合わせると

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$$

$$= \frac{1}{m} + \sum_{k=2}^{n}(c_{k-1} - c_k)$$

$$= \frac{1}{m} + c_1 - c_n$$

$$= \frac{1}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) - c_n = 1 - c_n$$

①，②，③ から

$$c_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{m}\right)c_n$$

$$c_n = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^{n-1}c_1 = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)^{n-1}$$

(4) (1)，(2) より

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(1 - c_n + \frac{1}{m}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{2}\left(1 - c_n - \frac{1}{m}\right)$$

であり，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ も合わせると，

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \frac{m+1}{m-1}$$

4.

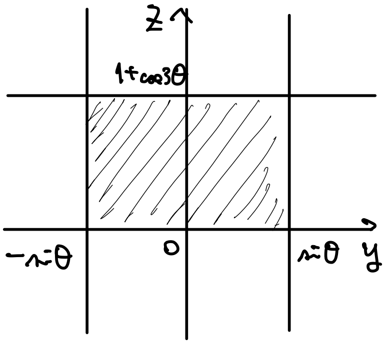
(1) $\cos 3\theta = \underline{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$

(2) $x = \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ における断面を考えると，それは

$$\cos^2\theta + y^2 \leqq 1 \quad \therefore |y| \leqq \sin\theta$$

$$0 \leqq z \leqq \cos 3\theta + 1$$

となる。



これより，Sの $x = \cos\theta$ における断面積 $S(\theta)$ は

$$S(\theta) = 2(1+\cos 3\theta)\sin\theta$$

である。$x \geqq \frac{1}{2}$ となるのは $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ のときであり，

$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} S(\theta)\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} S(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2(1+\cos 3\theta)\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 3\theta)(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{1 + \cos 3\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\cos 5\theta + \cos\theta)\right\} d\theta$$

$$= \left[\theta + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\sin 5\theta}{10} - \frac{\sin\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{20} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \underline{\frac{\pi}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{20}}$$

(3) Sの体積を W とすると

$$W = \int_{-1}^{1} S(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} S(\theta)\sin\theta\,d\theta = \pi$$

（積分の過程は同じで，上端が変わるだけ）となるから Uの体積を U とすると

$$V + U = \pi \quad \therefore U = \underline{\pi - V}$$

(4) $z = t$ における断面を考える。

$$x^2 + y^2 \leqq 1$$

$$0 \leqq t \leqq 4x^3 - 3x + 1$$

となる。ここで，$x = \cos\theta$ として $4x^3 - 3x + 1 = t$ を解くと

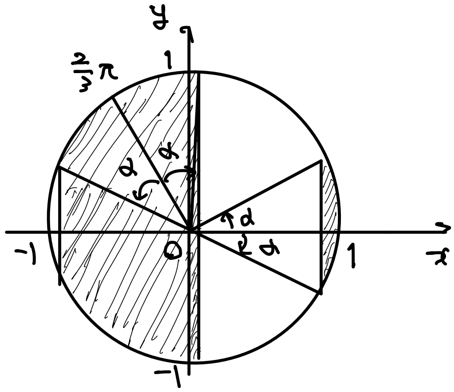
$$\cos 3\theta = t - 1$$

この解のうち，$x \geqq \frac{1}{2}$ を満たすものを α とおくと，

$$3\theta = 3\alpha,\ 2\pi - 3\alpha,\ 2\pi + 3\alpha$$

$$\theta = \alpha,\ \frac{2}{3}\pi - \alpha,\ \frac{2}{3}\pi + \alpha$$

となるから，Sの断面は次のようになる。



これより、Tをz軸の周りに120°回転すると、これはピッタリとSの中にすべて含まれる。よって、求める体積は $\underset{\sim\sim}{V}$ である。

注　$Y=4x^3-3x+1$ と $Y=t$ は図のようになる。