2025年1月23日　実施

杏林大学

医学部　一般　数学

解答・解説

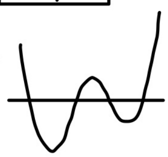
I. $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+1$

(a) $f'(x)=12x^3+6x^2-6x$

$\qquad =6x(2x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{11}{16}$	↗

したがって $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が4点を共有する条件は



$$\frac{11}{16}<k<1$$

$$\therefore\ k_1=\frac{11}{16},\quad k_2=1$$

$f(x)=\frac{11}{16}$ のとき

$$3x^4+2x^3-3x^2+\frac{5}{16}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(3x^2+5x+\frac{5}{4}\right)=0$$

したがって重解は $x=\frac{1}{2}$ であり、それ以外の2解を α, β とおくとき、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$$

(b) $x=\sqrt{2}i-1$ より $x+1=\sqrt{2}i$

両辺2乗して $(x+1)^2=(\sqrt{2}i)^2$

$$x^2+2x+1=-2$$

$$\therefore\ x^2+2x+3=0 \quad \leftarrow g(x)=0.$$

$f(x)$ を $g(x)$ で割ると 商は $3x^2-4x-4$.

余りが $20x+13$ である。

$$f(\sqrt{2}i-1)=20(\sqrt{2}i-1)+13$$

$$=-7+20\sqrt{2}i$$

(c) $f(x)-(ax+b)=3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2.$

$$\begin{cases} 2=-3(2\alpha+2\beta) \\ -3=3(\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta) \\ -a=-3\cdot 2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ 1-b=3\alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{1}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{5}{9}$$

$$a=\frac{10}{9},\quad b=\frac{2}{27}$$

Ⅱ.

(1) $-\frac{\pi}{2}<x<0$ のとき

$$\tan x < x < \sin x$$

$$\tan x - \sin x < x - \sin x < 0$$

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^2} < \frac{x - \sin x}{x^2} < 0$$

ここで、

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^2} = \tan x \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}$$

であるから、

$$\lim_{x\to -0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} = -0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

となる。よって ハサミウチの原理より

$\lim_{x\to -0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$ となる。

(2) $\lim_{x\to +0} f(x) = \frac{a\cdot 0 + b}{\sqrt{0+9}} = \frac{b}{3}$.

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3-2x}{3\cos x}$$

$$= 1\cdot\frac{3}{3\cdot 1} = 1$$

であるから、$f(x)$ が $x=0$ で微分可能、特に連続であることから、

$\frac{b}{3} = 1$ ∴ $b = 3$

である。次に、$x>0$ のとき

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x^2+9} - (ax+b)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}$$

$$= \frac{9a - bx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3(3a-x)}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

で、$\lim_{x\to +0} f'(x) = \frac{3\cdot 3a}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{3}$

また、$s = \sin x$, $c = \cos x$ とおくと、

$x<0$ のとき $f(x) = \frac{(3-2x)s}{3x}$

であり、$f'(x)$ の分子は

$$\{-2s + (3-2x)c\}x - (3-2x)s$$

$$= (3-2x)xc - 3s$$

となるから、

$$f'(x) = \frac{3cx - 2cx^2 - 3s}{3x^2}$$

$$= \frac{x-s}{x^2} - \frac{1-c}{x} - \frac{2}{3}c$$

であり、(1)も合わせると、

$$\lim_{x\to -0} f'(x) = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

となるから、$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることから

$\frac{a}{3} = -\frac{2}{3}$ ∴ $a = -2$

(3) $x=0$ における接線の方程式は

$y = -\frac{2}{3}x + 1$ である。これと、

$y = \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}$ を連立すると、

$$\frac{-2x+3}{3} = \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$(2x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

となるから、もう一つの交点の x 座標は $u = \frac{3}{2}$ である。さらに、

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx + \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

であり，

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-(x^2+9)'}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$= \left[-2\sqrt{x^2+9}\right]_0^{\frac{3}{2}} = -3\sqrt{5}+6$$

で，$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ において

$t = x+\sqrt{x^2+9}$ とおくて，

$$dt = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

これより，$\displaystyle\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

x	$0 \longrightarrow \frac{3}{2}$
t	$3 \longrightarrow \frac{3}{2}(1+\sqrt{5})$

$\alpha = \frac{3}{2}(1+\sqrt{5})$ とおくて．

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_3^{\alpha} \frac{3}{t}\,dt$$

$$= 3\left[\log t\right]_3^{\alpha} = 3\log\frac{\alpha}{3} = 3\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって，求める面積は

$$6-3\sqrt{5}+3\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

III

(1) (x, y, z) が L 上にあるとき,

x軸からの距離が1より $y^2+z^2=1$

y軸からの距離が1より $x^2+z^2=1$

である. $z=0$ とすると, $x^2=1$ かつ $y^2=1$

で, z座標を省略すると

A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)

とわかる. また, $x=y=0$ とすると $z^2=1$ で,

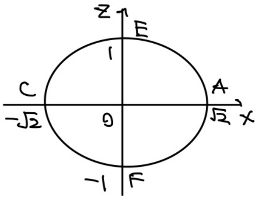
E(0,0,1), F(0,0,-1) である.

Lの方程式は $y^2+z^2=1$ かつ $x^2+z^2=1$

であり, $y=x$ 方向に X軸をとると,

$x=y=\frac{X}{\sqrt{2}}$ で, 楕円 $\frac{X^2}{2}+z^2=1$ となる.

これより この面積は $\pi\sqrt{2}\cdot1=\sqrt{2}\pi$ である.



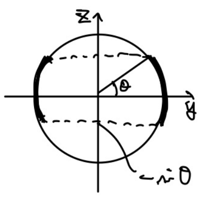
Kの方程式は

$x^2+z^2\leqq1$, $y^2+z^2\leqq1$

"$|x|\geqq1-|z|$ or $|y|\geqq1-|z|$"

である. $y^2+z^2=1$ のとき, 後ろ2つは満たされている. これより

$x^2+z^2\leqq1$ かつ $y^2+z^2=1$



$x=\cos\theta$ による断面は $|z|\leqq\sin\theta$ で, その長さは 4θ であるから.

展開図の面積は

$$2\int_0^1 4\theta\,dx = 8\int_0^1 \theta\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

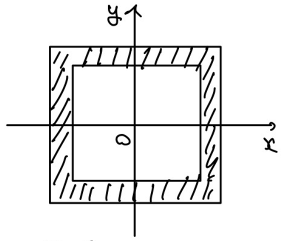
$$= 8\int_0^1 \theta\cos\theta\,d\theta = 8$$

$t>0$ として, 正八面体の $z=t$ における断面は 1辺が $2(1-t)$ の正方形であるから, Kの $z=t$ における断面は

$x^2\leqq1-t^2$, $y^2\leqq1-t^2$

"$|x|>1-t$ or $|y|>1-t$"

で, 次図の網目部分になる.



その断面積 $S(t)$ は

$$S(t)=4\{(1-t^2)-(1-t)^2\}$$

$$=-8t^2+8|t|$$

対称性も考えると, 体積 V は

$$V=2\int_0^1 S(t)\,dt$$

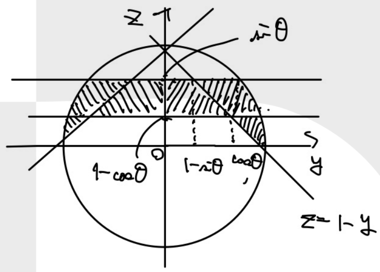
$$=16\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

また, $x=u$ における断面は

$y^2+z^2\leqq1$, $u^2+z^2\leqq1$,

"$|z|\geqq1-u$ or $|y|\geqq1-|z|$"

となる. $u=\cos\theta$ とすると, 断面は次のようになる.



この面積 S について

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\cdot 1^2\theta + \frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$$

$$S = 2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)$$

$$= 2\theta + \sin 2\theta - 2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= 2\theta + \sin 2\theta + \cos 2\theta - 1$$

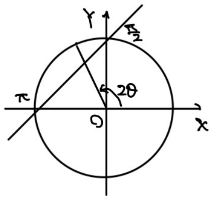
となる。

$$\frac{dS}{d\theta} = 2 + 2\cos 2\theta - 2\sin 2\theta$$

$$= 2(1+\cos 2\theta - \sin 2\theta)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

これより、$\theta = \frac{\pi}{4}$、すなわち $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で、最大値 $\frac{\pi}{2} + 1 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2}$ をとる。



(2) $n+1$ 秒後に E にいるのは、n 秒後に A〜D のいずれかにいるときだけで、

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n-q_n) \quad \cdots ①$$

となる。同様に考えて、

$$q_{n+1} = \frac{1}{6}(1-p_n-q_n) \quad \cdots ②$$

である。n 秒後に A〜D にいる確率を r_n とおくて、$r_n = 1-p_n-q_n$ で、①+② より

$$1 - r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$$

$$r_{n+1} = -\frac{1}{2}r_n + 1$$

$$r_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(r_n - \frac{2}{3}\right)$$

これより数列 $\left\{r_n - \frac{2}{3}\right\}$ は等比数列で、

$$r_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(r_0 - \frac{2}{3}\right)$$

$r_0 = 0$ であるから

$$r_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

である。A〜D は対等より、4秒後に A にいる確率は $\frac{1}{4}r_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16} = \frac{5}{32}$ であり、

$$q_{n+1} = \frac{1}{6}r_n = \frac{1}{9}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

であるから、F にいる確率の最大は 2秒後で、$q_2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{6}$

さらに、$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}r_{n-1} = \frac{2}{9}$

講評.

$\boxed{\text{I}}$ は.数IIの微積分・式と証明・複素数・方程式がテーマ
方程式の解を利用して因数分解すると計算がスムーズ.
(c)は.重接線がテーマであり頻出事項.

$\boxed{\text{II}}$ は.関数の連続性と微分可能性がテーマ.

$x=0$で連続であることは必要条件
まずは $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to-0} f(x)$ を用いる.このとき $f(0)$と一致している.
また $x=0$における微分可能性について.$f'(0)$が存在することは通常

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

を用いることで.この定まる極限値を$f'(0)$と定めるのだが今回は誘導にのり

$$\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to-0} f'(x)$$

を利用して $\lim_{x\to0} f'(x)$ を求めた.ただし本来は関数$f(x)$が連続である
ことが示されないと. $\lim_{x\to0} f'(x)=f'(0)$ ではない.あくまでも穴埋め問題だから….
積分 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ は重要事項.最難関大受験生は必ず身につけておきたいが.
なかなか高尚な道具だと思う.

$\boxed{\text{III}}$ 誘導がめんどくさい印象.始めから「直交する2円柱」と書かれれば 手が動くと
思うが.最初は円柱面.序々に拡張されて とまどう受験生も多かったのではないか.
この手の問題は立体図形を不等式で表すと切り出しやすい.
(2)は解きやすく.(1)とは無関係な問題である.(1)であきらめてしまい.
全く手をつけなかった受験生も多いだろう.点E,F以外の点にある確率
を設定できないと厳しい.