

東京慈恵会医科大学

1. 次の□にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ.

1個のさいころを3回続けて投げるとき、 k 回目に出る目を X_k ($k = 1, 2, 3$) とする. このとき、積 $X_1 X_2 X_3$ が10の倍数となる確率は□, 和 $X_1 + X_2, X_2 + X_3, X_3 + X_1$ が、いずれも6の倍数にならない確率は□である.

2. 次の問いに答えよ. ただし、対数は自然対数とする.

(1) 3以上の自然数 n について、次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\log(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \frac{1}{2\log n}$$

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ を求めよ.

(3) $m \geq n$ をみたす3以上の自然数 m, n について、次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

3. 自然数 p は2以上の定数とする. xy 平面上で不等式 $x^2 - py^2 \geq -1$ の表す領域を D とする. 自然数 r は、円 $(x-p)^2 + y^2 = r$ が領域 D に含まれるような最大のものとするとき、次の問いに答えよ.

(1) r を p を用いて表せ.

(2) (1)のもとで、関係式 $(x-p)^2 + y^2 = r$ をみたす互いに異なる素数の組 (x, y, p) のうち、 p の値が最小となるものを求めよ.

4. z は実数ではない複素数で、 $z + \frac{1}{z-1}$ が正の実数となるものとする. このとき、 $\left| \frac{1}{z-1} - \frac{z-\bar{z}}{2} + 1 \right|$ がとり得る値の範囲を求めよ. ただし、 \bar{z} は z に共役な複素数とする.