日本医科大学・前期

1．1から6の目をもつ1つのさいころがある．i を虚数単位とするとき，複素数平面上の点 z が $z_0 = 1$ から出発して，さいころを1回投げるごとに，次の規則に従って動く．

［規則］「4以下の目が出たら現在の点に対応する複素数に $\sqrt{2}i$ を掛け，5または6の目が出たら $1+i$ で割る．このようにして得られる複素数に対応する点を新たな点 z とする．」

n を1以上の整数とし，さいころを n 回投げたとき，4以下の目が $k\,(k = 0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n)$ 回出る確率を $P_{n,\,k}$ とし，この場合の点 z に対応する複素数を $z_{n,\,k}$ と表すとき，以下の空欄に適する1以上の整数を求めよ．

（1） 確率 $P_{n,\,k}$ は，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を用いて

$$P_{n,\,k} = {}_n\mathrm{C}_k \frac{\square^k}{\square^n}$$

と表せる．また複素数 $z_{n,\,k}$ は

$$z_{n,\,k} = 2^{\frac{\square k - n}{\square}} \left\{ \cos\left(\frac{\boxed{\text{ア}}k - n}{\boxed{\text{イ}}}\pi \right) + i\sin\left(\frac{\boxed{\text{ア}}k - n}{\boxed{\text{イ}}}\pi \right) \right\}$$

となる．

（2） 確率 $P_{2025,\,k}$ は $k = \square$ のとき，最大値をとる．

（3） 複素数 $z_{2025,\,k}$ が純虚数となる k は $\square$ 個ある．

2．O を原点とする座標空間において，四面体 OABC は $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = 1,\ \mathrm{AC} = 2,\ \mathrm{OC} = \mathrm{BC} = \sqrt{3}$ を満たす．$0 < x < 1$ を満たす実数 x に対し，線分 OA を $x : (1-x)$ に内分する点を D とする．点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす．また，三角形 ABC の内心を I とし，三角形 DHI の面積を S とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき，以下の各問いに答えよ．

（1） 空欄に適する数を求めよ．答えのみでよい．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \square,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \square,\ \vec{c}\cdot\vec{a} = \square$$

（2） 空欄に適する数を求めよ．答えのみでよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \square\vec{a} + \square\vec{b} + \square\vec{c}$$

（3） 空欄に適する数を求めよ．答えのみでよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \square\vec{a} + \square\vec{b} + \square\vec{c}$$

（4） $S = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき，x の値を求めよ．導出過程も記せ．

3．O を原点とする座標空間内において，点 P は xy 平面内の曲線 $x = 2y^2$ 上を動き，点 Q は zx 平面内の曲線 $x = 2z^2$ 上を動くとき，以下の各問いの空欄に適する数値あるいは数式を求めよ．（4）については導出過程も記せ．

（1） 正の定数 k に対して，平面 $x = k$ と S の共通部分は，平面 $x = k$ 内の点 $\left(k,\,\square,\,\square\right)$ を中心とし，半径 $\square$ の円となる．

（2） 点 A から x 軸に下した垂線を AH とするとき，線分 AH の長さは $\square$ となる．

（3） 点 A を平面 $x = 1$ 内の点 $(1,\,0,\,0)$ を中心として x 軸の周りに回転して xy 平面上に移す．このような点のうちで y 座標が正となるものを B とすると，点 B の座標は $\left(\square,\,\square,\,\square\right)$ となる．

（4） 集合 S 上で点 X を動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$ は X の座標が $\left(\square,\,\square,\,\square\right)$ のとき，最小値 $\square$ をとる．

4．（1） 全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して，関数 $b(x),\,c(x)$ を次で定める．

$$b(x) = \frac{1}{2}\{a(x) + a(-x)\},\quad c(x) = \frac{1}{2}\{a(x) - a(-x)\}$$

このとき，$b(x)$ は x の偶関数，$c(x)$ は x の奇関数，となることをそれぞれ示せ．

（2） 全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件（ア），（イ）を満たすものとする．

（ア）　$f(0)=2,$

（イ）　$f(x+h)+\displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt=f(x)$ が全ての実数 $x,\,h$ に対して成り立つ．

ただし，$g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ である．

このとき，以下の（ｉ）〜(iii）の各問いに答えよ．

（ｉ）　関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ．

（ii）（イ）で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0)=0$ を満たすものを求めよ．答えのみでよい．

（iii）（ii）の $G(x)$ に対して関数 $h(x)$ を $h(x)=e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき，$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ．

（３）（２）で求めた関数 $f(x)$ に対して，次の定積分の値を求めよ．

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$