２０２５年度　私大医学部入試

２０２５年２月４日　実施

藤田医科大学

医学部　前期　**数 学**

（制限時間　１００分）

解答速報

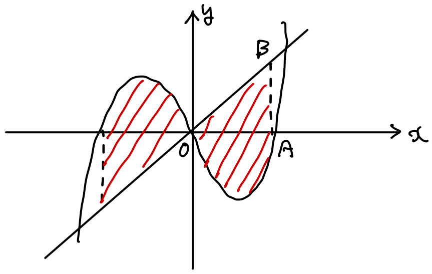
医学部専門予備校 D組

解答・解説

1

(1) $C: y=x^3-x$. $y'=3x^2-1$.

[したがって $x=0$ のとき $y'=-1$ より法線の傾きは1]



C の O における接線は傾きが -1 であり. C が $-1<x<0$ で上に凸だから, C の $-1\leqq x\leqq 0$ の部分は. この接線よりも下側にある.

したがって $y\geqq 0$ の部分を y 軸まわりに回転してできる立体は図の三角形OABを回転したもの.

故に

$$V=\left\{(\pi\cdot 1^2)\times 1-\frac{1}{3}(\pi\cdot 1^2)\cdot 1\right\}\times 2$$
$$=\underline{\frac{4}{3}\pi}$$

(2) $$z_n=\left\{\frac{\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}\right\}^n$$ とおく

$$\arg(z_n)=n\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{2}{9}\pi\right)$$
$$=\frac{29n}{18}\pi.$$

$|z_n|=1$ だから $z_n=1$ となる条件は

$$\frac{25n}{18}\pi=2m\pi\quad(m:\text{整数})$$

これを満たす最小の自然数 n は

$\underline{n=36}$

(3) $x^2-2ax+4a+5=0$

判別式を D とすると $D\geqq 0$

$$D/4=a^2-(4a+5)\geqq 0$$
$$(a+1)(a-5)\geqq 0$$
$$\therefore a\leqq -1,\ 5\leqq a \quad \text{—①}$$

このとき解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2a\\ \alpha\beta=4a+5\end{cases}$$

よって

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(2a)^2-2(4a+5)$$
$$=4a^2-8a-10$$
$$=4(a-1)^2-14$$

①より $\underline{a=-1}$ のとき最小となる.

(4) $n-1$ 回目までに1が9回出るので $n\geqq 10$ として

$$P_n={}_{n-1}C_9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^9\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-10}\times\frac{1}{6}.$$

$f(n)=\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ とおくと

$$f(n)=\frac{{}_nC_9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^9\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-9}\cdot\frac{1}{6}}{{}_{n-1}C_9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)^{n-10}\cdot\frac{1}{6}}$$
$$=\frac{n\cdot 5}{(n-9)\cdot 6}$$

$f(n)>1 \Leftrightarrow 5n>6(n-9)\ \therefore n\leqq 53$

$f(n)=1 \Leftrightarrow n=54$

$f(n)<1 \Leftrightarrow n\geqq 55$

よって $P_{10}<P_{11}<\cdots<P_{53}<P_{54}=P_{55}>P_{56}>\cdots$

P_n を最大とする最小の n は $\underline{54}$

(5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x}-2x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2x}=-\frac{1}{4}$

(6) $a_1=1$. $a_{n+1}=a_n+n^2-n$

$n\geqq2$のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)$

$=1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\}$

$=1+\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n$

$a_n>2025$.

$a_{19}=1+\frac{1}{3}\cdot17\cdot18\cdot19=1939$

$a\ \ =1+\frac{1}{3}\cdot18\cdot19\cdot20=2281$

よって $n=20$

(7) $BQ=\frac{a(a+b)}{a+2b}$

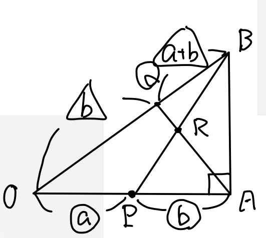
よって $b=\frac{a(a+b)}{a+2b}$

$b(a+2b)=a(a+b)$

$ab+2b^2=a^2+ab$

$a^2=2b^2$

$a=\sqrt{2}b$.



つまり OA=AB の直角二等辺三角形である

OP:PA=$\sqrt{2}$:1より BP は∠ABOの二等分線.

一方. $BQ=OB\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})}$

$=\sqrt{2}\times OA\times\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$=OA$.

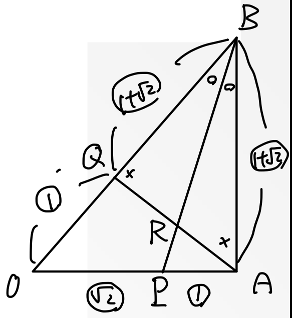
したがって BQ=ABである.

つまり 三角形ABQは二等辺三角形

であり, 直線BRがこれを二等分し

BR⊥AQである.

よって ∠PRQ=∠ARB=90°



OA=b. OB=a とすると解けるので. おそらく

この a. b は辺の長さのことであろう

(8) $f(x)=3^{2x}+3^{-2x}+3^{x+1}-3^{-x+1}$

$t=3^x-3^{-x}$とおくと

$f(x)=t^2+3t+2$

これを $g(t)$ とおく.

$g(t)=(t+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$

$t=-\frac{3}{2}$のとき min: $-\frac{1}{4}$

$t=-\frac{3}{2}$より $3^x-3^{-x}=-\frac{3}{2}$ を満たすxは

$2\cdot(3^x)^2+3\cdot3^x-2=0$

$(2\cdot3^x-1)(3^x+2)=0$ ∴ $3^x=\frac{1}{2}$

より, 確かに存在する

(9) 5人の身長のデータをxとする

x: 161, 163, 167, 179, 185

ここで $x=2y+171$ とおくと

y: −5, −4, −2, 4, 7.

y^2: 25, 16, 4, 16, 49

であるから

$\bar{y}=\frac{(-5)+(-4)+(-2)+4+7}{5}=0$

$\overline{y^2}=\frac{25+16+4+16+49}{2}=22$

よって $S_y^2=\overline{y^2}-(\bar{y})^2=22$.

したがって $S_x^2=2^2\times S_y^2=88$

$\boxed{2}$ $C_1: y=x^2+2(k+1)x+4k+3$
$C_2: y=x^2+2(k-1)x-4k+3$.

(1) lを $y=(2k+2m)x+n$ とおく

l, C_1を連立して

$$x^2+2(k+1)x+4k+3=(2k+2m)x+n$$
$$x^2-2(m-1)x+4k+3-n=0 \quad \text{―①}$$

判別式をD_1とすると $D_1=0$

$$D_1/4=(m-1)^2-4k-3+n=0. \quad \text{―②}$$

l, C_2を連立して

$$x^2+2(k-1)x-4k+3=(2k+2m)x+n$$
$$x^2-2(m+1)x-4k+3-n=0 \quad \text{―③}$$

判別式をD_2とすると $D_2=0$.

$$D_2/4=(m+1)^2+4k-3+n=0 \quad \text{―④}$$

③-④より

$$-4m-8k=0 \quad \therefore m=-2k.$$

③より

$$n=-(-2k-1)^2+4k+3$$
$$=-4k^2+2$$

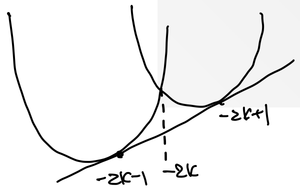
したがって $l: y=-2kx-4k^2+2$

(2) 接点のx座標は①,③の重解だから

$$\alpha=m-1=-2k-1, \quad \beta=m+1=-2k+1$$

とおく．またC_1, C_2の交点は

$$x^2+2(k+1)x+4k+3=x^2+2(k-1)x-4k+3$$
$$4x=-8k \quad \therefore x=-2k$$



したがって面積は

$$S=\int_{-2k-1}^{-2k}(x+2k+1)^2dx+\int_{-2k}^{-2k+1}(x+2k-1)^2dx$$
$$=\frac{2}{3}$$

$\boxed{3}$ $6^m=2^n+4$.

$2^n>0$より 右辺は4より大きい．したがって$m\geq1$である
またこのとき 左辺は6以上であり $2^n+4\geq6$. 故に$n\geq1$.
つまりm, nは正の整数である.

(i) $n\geq3$のとき

$$6^m=2^2(2^{n-2}+1)$$

よって右辺は2^2の倍数となるが2^3の倍数ではない．したがって$m=2$が必要．このとき

$$36=2^n+4 \quad \therefore n=5.$$

(ii) $n=2$のとき

$$6^m=2^3$$

これを満たすmは存在しない．

(iii) $n=1$のとき

$$6^m=6 \quad \therefore m=1.$$
$$\therefore (m,n)=(1,1),(2,5)$$

$\boxed{別}$ $6^m=2^n+4$

両辺を3で割った余りで表すと．

$$6^m=(3-1)^n+4$$

左辺は3で割り切れるので 右辺が3で割り切れるためには $(3-1)^n=3M+(-1)^n$ (M:整数)
を3で割った余りが2になることが必要．
よってnは奇数であり $n=2l+1$ (lは0以上の整数)

$$6^m=2^{2l+1}+4$$
$$6^m=2\cdot4^l+4.$$

$l=0$のとき$m=1$であり これを満たす．
$l\geq1$のとき 右辺は4の倍数となり $m\geq2$.

ここで

$$6^{m-2}\times36=8\times4^{l-1}+4$$
$$9\times6^{m-2}=2\times4^{l-1}+1.$$

$l\geq1$のとき右辺は奇数となる．仮に$m\geq3$のとき左辺は偶数となり不適．よって$m=2$．このとき

$$9=2\times4^{l-1}+1$$
$$\therefore l-1=1 \quad \therefore l=2$$

したがって $(m,l)=(1,0),(2,2)$

$$\therefore (m,n)=(1,1),(2,5)$$