２０２５年２月２日　実施

福岡大学

医学部　一般　**数　学**

（制限時間　９０分）

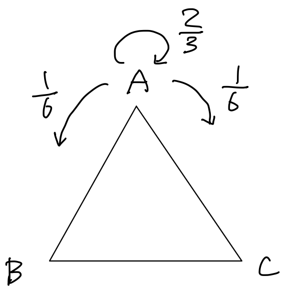
解答速報

医学部専門予備校 D組

解答・解説

[1]

(i)



2秒後にPがBにいる確率は

$A \to A \to B$　$\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$

$A \to B \to B$　$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$

$A \to C \to B$　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\underline{\frac{1}{4}}$$

また3秒間、常にAorCにある確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\underline{\frac{125}{216}}$$

(ii) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\underline{-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}}$

平面PQR上にSがあるとき

$\overrightarrow{OS}=(1-m-n)\overrightarrow{OP}+m\overrightarrow{OQ}+n\overrightarrow{OR}$

とおけて

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1-m-n}{2}\overrightarrow{OA}+m\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)+n\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=\frac{3+m-3n}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{5m+9n}{15}\overrightarrow{OB}+\frac{2n}{5}\overrightarrow{OC}$$

SがOC上のとき

$$\frac{3+m-3n}{6}=0,\quad \frac{5m+9n}{15}=0$$

$$\therefore m=-\frac{9}{8},\ n=\frac{5}{8}$$

よって　$\overrightarrow{OS}=\underline{\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}}$

別　カルノーの定理（空間メネラウス）を用いると

$$\frac{1}{1}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{SO}{CS}=1$$

$3OS=CS$　$\therefore OS:SC=1:3$

よって　$\overrightarrow{OS}=\underline{\frac{1}{4}\vec{c}}$

(iii) $C: y=x^2+5x+4$, $l_1: y=3x+k+1$, $l_2: y=3x+k$

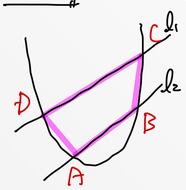
Cとl_2が2点で交わるとき

$$x^2+5x+4=3x+k$$
$$x^2+2x+4-k=0 \quad —①$$

判別式Dとすると$D>0$

$\frac{D}{4}=1-(4-k)>0$　$\therefore \underline{k>3}$

このときCとl_1も2点で交わる



Cとl_2の交点は①の解から

$$x=-1\pm\sqrt{k-3}$$

2解の差は　$2\sqrt{k-3}$

よって2交点間のきょりは傾き3だから

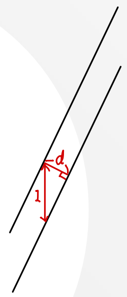
$$2\sqrt{k-3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}\cdot\sqrt{k-3}$$

同様にCとl_1を連立して

$$x^2+5x+4=3x+k+1$$
$$x^2+2x+3-k=0$$
$$x=-1\pm\sqrt{k-2}$$

よって2交点間のきょりは

$$2\sqrt{10}\cdot\sqrt{k-2}$$



2直線l_1, l_2間のきょりdは

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

よって四角形の面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{10}\cdot\sqrt{k-3}+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{k-2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{k-3}+\sqrt{k-2}$$

$S=2$ より

$$\sqrt{k-3}+\sqrt{k-2}=2. \quad \text{—②}$$

②より

$$\frac{1}{\sqrt{k-3}+\sqrt{k-2}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sqrt{k-2}-\sqrt{k-3}=\frac{1}{2} \quad \text{—③}$$

②+③より

$$2\sqrt{k-2}=\frac{5}{2}$$

$$\sqrt{k-2}=\frac{5}{4}$$

$$k-2=\frac{25}{16} \qquad \therefore k=\frac{57}{16}$$

[2] (1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$

$$=\frac{1}{12}n(n+7)-\frac{1}{12}(n-1)(n+6)$$

$$=\frac{1}{12}(2n+6)=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}$$

である。この結果は $n=1$ でも正しい。また，

$$\cos \pi a_n=\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{6}n$$

であるから，この値は

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0$$

を周期12で繰り返し，1周期あたりの和は0である。これより

$$\sum_{n=1}^{2025}\cos(\pi a_n)$$

$$=168\sum_{n=1}^{12}\cos(\pi a_n)+\sum_{n=1}^{9}\cos(\pi a_n)$$

$$=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(2)

$$m=\frac{1}{10}\{(-5)+(-2)+2+5+6+8+9+10+12+15\}$$

$$=\frac{1}{10}\cdot 60=6$$

であり，大きい方から5番目が8，6番目が6より $M=7$ である。

また，$m'=\frac{1}{11}(60+a)$ であり

M' について $a \geqq 8$ のとき $M'=8$，$a \leqq 6$ のとき $M'=6$，$6 \leqq a \leqq 8$ のとき $M'=a$ である。このとき，

$$m'-6=101(M'-7)$$

・$a \geqq 8$ のとき：$M'=8$ で

$$m'-6=101 \qquad \therefore m'=107$$

これより

$$\frac{1}{11}(60+a)=107$$

$$60+a=1177 \qquad \therefore a=1117$$

これは $a \geqq 8$ を満たす。

・$6 \leqq a \leqq 8$ $(a \neq 7)$ のとき：$M'=a$ で

$$m'-6=101(a-7)$$

$$\frac{1}{11}(60+a)-6=101(a-7)$$

$$a-6=1111(a-7)$$

$$1110a=7771 \qquad \therefore a=\frac{7771}{1110}$$

これは $6 \leqq a \leqq 8$ を満たす。

・$a \leqq 6$ のとき：$M'=6$

$$m'-6=-101 \qquad \therefore m'=-95$$

これより

$$\frac{1}{11}(60+a)=-95$$

$$60+a=-1045 \qquad \therefore a=-1105$$

これは $a \leqq 6$ を満たす。

よって $a=1117,\ -1105,\ \frac{7771}{1110}$ である

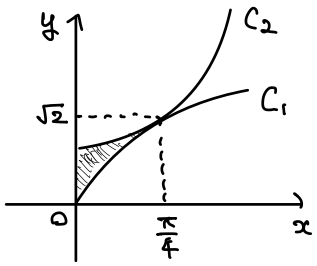
[3]

(1) C_1 と C_2 を連立して

$$\frac{1}{\cos x} = a\sin x$$

$$a\sin x\cos x = 1 \qquad \therefore \sin 2x = \frac{2}{a}$$

$0 \leqq 2x < \pi$ においてこの解が1つとなるのは $\frac{2}{a}=1$，すなわち $a=\underline{2}$ のときで，そのときの共有点の x 座標は $2x=\frac{\pi}{2}$，すなわち $x=\frac{\pi}{4}$ である．



C_2 について，$y'=2\cos x$ であるから，l の方程式は

$$y=\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$$

$$\underline{y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$$

(2) 求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos x}-2\sin x\right)dx$$

である．ここで，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\cos x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\log(1+\sqrt{2})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+1$$

であるから，

$$S=\log(1+\sqrt{2})-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\underline{\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-2}$$