２０２５年２月３日　実施

順天堂大学

医学科　一般　数学

（制限時間　７０分）

解答・解説

$\boxed{\text{I}}$ (1)

$$\log_{10} a_n = (n+3)\log_{10}2 - n\log_{10}3$$
$$= (\log_{10}2 - \log_{10}3)n + 3\log_{10}2$$

$a_n < 1$ となるとき，$\log_{10} a_n < 0$ で

$$(\log_{10}2 - \log_{10}3)n + 3\log_{10}2 < 0$$
$$n > \frac{3\log_{10}2}{\log_{10}3 - \log_{10}2}$$
$$= \frac{3\cdot 0.3010}{0.4771 - 0.3010} = 5.12\cdots$$

よって $a_n < 1$ となる最小の n は $\underline{6}$ である．

また，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 8\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$= \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \underline{16}$$

である．さらに，

$$\log_{10} b_n = \log_{10}(a_1 a_2 \cdots a_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \log_{10} a_n$$
$$= \frac{1}{2}n\{(7\log_{10}2 - \log_{10}3) - (\log_{10}3 - \log_{10}2)n\}$$

となる．$b_n < 1$ となるとき，

$\log_{10} b_n < 0$ であるから．$n > 0$ に注意すると

$$n > \frac{7\log_{10}2 - \log_{10}3}{\log_{10}3 - \log_{10}2}$$
$$= \frac{7\cdot 0.3010 - 0.4771}{0.4771 - 0.3010} = 9.25$$

よって $b_n < 1$ となる最小の n は $\underline{10}$ である．

(2)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする．

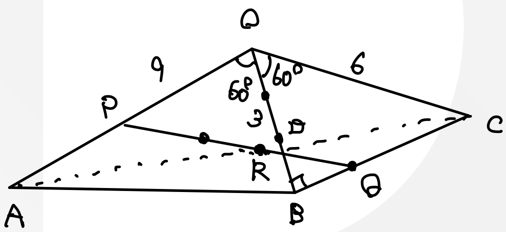
$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{b}$ であり，

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$$
$$= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}$$
$$= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}(1-t)\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{c}$$

であるから．

$$\overrightarrow{DR} = \frac{s}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}t\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{c}$$
$$= \underline{s\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right) + t\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}\right)}$$

と表されるから，R は平面上を動く．



ここで、$\vec{k}=\frac{1}{3}\vec{a}$，$\vec{l}=\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})$

とおくと、$|\vec{k}|=\frac{1}{3}|\vec{a}|=3$ である。

また △DBC は 60度定規 であるから

BC $=3\sqrt{3}$ であり、$|\vec{l}|=\frac{2}{3}\mathrm{BC}=2\sqrt{3}$

となる。これより $|\vec{k}|^2=\underline{9}$，$|\vec{l}|^2=\underline{12}$ で

ある。さらに、

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ=27$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\frac{27}{2}$$

であるから、

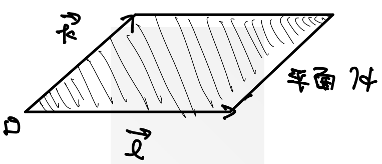
$$\vec{k}\cdot\vec{l}=\frac{2}{9}\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$

$$=\frac{2}{9}\left(27-\frac{27}{2}\right)=\underline{3}$$

R は $\vec{k}$ と $\vec{l}$ で張られる平行四辺形の境界および内部を動くから、その面積は

$$\sqrt{|\vec{k}|^2|\vec{l}|^2-(\vec{k}\cdot\vec{l})^2}=\sqrt{9\cdot 12-3^2}$$

$$=\underline{3\sqrt{11}}$$



(3)

P(0) = 269 であるが、y = −b とすると、P(0) について

$$b^4-4b^3-48b^2+64b+256=269$$

$$b^4+4b^3-48b^2-64b-13=0$$

$$(b+1)(b^3+3b^2-51b-13)=0$$

ここで、b = −1 としてみると、

$$P(y+1)=y^4-4y^3-48y^2+64y+256$$

となるから、$b=\underline{-1}$ である。y = 4z と

おくと、

$$P(4z-1)=256z^4-256z^3-768z^2+256z+256$$

となるから、$a=\underline{4}$，$c=\underline{256}$，$d=\underline{-768}$

である。P(4z−1) = 0 を解く。

$$z^4-z^3-3z^2+z+1=0$$

z = 0 は解ではないから、$z^2\neq 0$ で割って

$$z^2-z-3+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

$t=z-\frac{1}{z}$ とおくと、$t^2=z^2+\frac{1}{z^2}-2$

であり、

$$(t^2+2)-t-3=0$$

$$t^2-t-1=0$$

$$t=\underline{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$$

これを z について解くと、

$$z^2-tz-1=0$$

$$z=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4}}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{22\pm 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{22\pm 2\sqrt{5}}}{4}\quad(\text{複号同順})$$

これが P(4z+1) = 0 の解であるから、P(x) = 0 の解のうち最も大きいものは、

$$x=1+\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}-1$$

$$=\underline{\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}}$$

(4)

(i) $0 < |x+2| - |x-1| < 3$ を解く.

左側を考えて

$$|x+2| > |x-1|$$

$$-(x+2) < x-1 < x+2$$

$$x > -\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

となる. 右側を考えて.

・$x \leqq -2$ のとき:

$$-(x+2) + (x-1) < 3$$

$$-3 < 3$$

これより $x \leqq -2$ はすべて解になる.

・$-2 \leqq x \leqq 1$ のとき:

$$x+2+(x-1) < 3$$

$$2x+1 < 3 \quad \therefore x < 1$$

これよりこの範囲の解は $-2 \leqq x < 1$ である.

・$x \geqq 1$ のとき:

$$x+2-(x-1) < 3 \quad \therefore 3 < 3$$

これよりこの範囲に解はないから, 右側の不等式の解は $x < 1 \cdots ②$ である. ①かつ② より $-\frac{1}{2} < x < 1$ でとなる.

$$-\frac{1}{2} < x < 1 \ \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ -1 < x < 1$$

よって, 十分条件であるが, 必要条件ではない ((C))

(ii) a, b を有理数とする.

x が a^b の形でかける $\underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ x が有理数

(⇒) の反例は $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, すなわち $x=\sqrt{3}$ である. (⇐) は, $x = x^1$ という形でかけるから成立する.

よって, 必要条件であるが, 十分条件ではない ((B))

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(⇒) について: $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ とし, $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とおいて,

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} (S_N - S_{N-1})$$

$$= S - S = 0$$

となるから収束する.

(⇐) の反例: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ とすると, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ だが

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{N+1} - 1 \longrightarrow \infty \quad (N \to \infty)$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{1}$$
$$\sqrt{3} - \sqrt{2}$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{N+1} - \sqrt{N}$$

となり収束しない.

よって十分条件であるが, 必要条件ではない ((C))

(iv) $m^2+n^2+l^2$ が奇数 $\underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $m+n+l$ が奇数

整数 m に対して, m と m^2 の偶奇は等しいから これは必要十分条件である ((A))

$\boxed{\text{II}}$

(1) 条件 (i) より

$$f(x)-6x = a(x+2)(x-1)(x-4)$$

とおける。

$$f(x) = a(x^3-3x^2-6x+8)+6x$$

$$f'(x) = a(3x^2-6x-6)+6$$

であるから、条件 (ii) より

$$f'(-2) = 18a+6 = -3$$

これより $a = -\frac{1}{2}$ となるから、

$$f(x) = \underline{-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x-4}$$

(2) 条件 (i) より

$$f(x)-6x = a(x-1)^2(x-4)$$

とおける。

$$f(x) = a(x^3-6x^2+9x-4)+6x$$

$$f'(x) = a(3x^2-12x+9)+6$$

$$= 3a(x-1)(x-3)+6$$

ここで、$f'(x)=6$ となるのは $x=1,3$ であり、$x=3$ における接線は

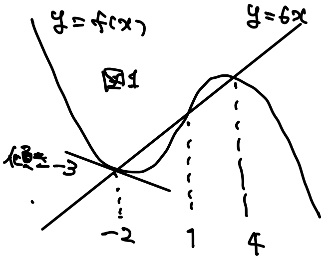
$$y = 6(x-3)+(-4a+18)$$

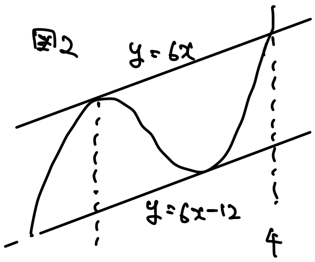
$$y = 6x-4a$$

となることから、これが $y=6x-12$ と一致するとき

$$-4a=-12 \quad \therefore a=3$$

よって $f(x) = \underline{3x^3-18x^2+33x-12}$ である。





(3) 条件 (i) より

$$f(x)-6x = a(x-1)^3$$

とおける。

$$f'(x) = 3a(x-1)^2+6$$

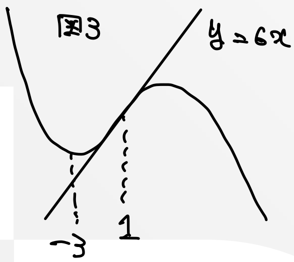
条件 (ii) より $f'(-3)=0$ であり

$$f'(-3) = 3a\cdot16-6 = 0$$

よって $a=-\frac{1}{8}$ である。

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x-1)^3+6x$$

$$= \underline{-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{45}{8}x+\frac{1}{8}}$$



Ⅲ

(1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx$

$= \left[-\log\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2}\log 2$

(2) $n=1$ のとき,

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x\,dx$

$= -I_0 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,(\tan x)'\,dx$

$= -I_0 + \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -I_0 + \frac{1}{2}$

となり成立する. $n=k$ で成立しているとする. すなわち

$I_k = (-1)^k\left(I_0 + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m}\right)$

である. このとき,

$I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\tan^{2k+1}x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan^{2k+1}x\,dx$

$= -I_k + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1}x\,(\tan x)'\,dx$

$= -I_k + \left[\frac{1}{2k+2}\tan^{2k+2}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -I_k + \frac{1}{2(k+1)}$ ⋯ ①

$= -(-1)^k\left(I_0 + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m}\right) + \frac{1}{2(k+1)}$

$= (-1)^{k+1}\left(I_0 + \sum_{m=1}^{k+1}\frac{(-1)^m}{2m}\right)$

となり $n=k+1$ でも成立する.

よって数学的帰納法により示された.

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において, 図より.

$0 \leqq \tan x \leqq \frac{4}{\pi}x$

であることから,

$0 \leqq I_n \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}x\right)^{2n+1}dx$

ここで, 右辺について

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}x\right)^{2n+1}dx = \left[\frac{1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

となり, ハサミウチの原理より

$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ と分かる. (2) の等式から

$|I_n| = \left|I_0 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right|$

であり, 両辺において $n\to\infty$ とすると

$0 = \left|I_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m}\right|$

$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m} = -2I_0 = \log 2$

となり示された.

別解 ① より, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}$

であり, $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ においては

$0 \leqq \tan x \leqq 1$ であるから,

$I_n \geqq I_{n+1}$ である. これより,

$2I_{n+1} \leqq I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}$

$(0 \leqq)\ I_n \leqq \frac{1}{4n}$

であるから, ハサミウチの原理より

$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ である.

あとは本解と同様である.