2025年2月9日　実施

慶應義塾大学

医学部　一般　**数　学**

（制限時間　100分）

解答・解説

[1]

(1) 身長を X cm とする．$Z=\dfrac{X-158}{5}$ とおくと，これは $N(0,1)$ に従う．ここで，

$$\frac{153-158}{5} \leqq \frac{X-158}{5} \leqq \frac{170.5-158}{5}$$

$$-1 \leqq Z \leqq 2.5$$

であるから，$153 \leqq X \leqq 170.5$ となる生徒は $(0.3413+0.4938)\cdot 100 = 83.51$，すなわち 84 % いる．また，$Z$ が小さい方から 2.5% に入る条件を $X \leqq a$ とすると，表より

$$-2 < \frac{a-158}{5} < -1.8$$

$$148 < a < 149$$

であるから，整数値で求めて，低い方から 2.5% に入るのは 148cm 以下である

(2) $\int_1^e f(x)dx = 1$ である．ここで，

$$\int_1^e x\log x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

であることから，r の満たす条件は

$$\frac{r}{4}(e^2+1) = 1 \quad \therefore\ r = \frac{4}{e^2+1}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

$$= \int_0^1 \sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \quad \cdots\cdots ①$$

$t=\dfrac{\pi}{2}x$ とおくと，$dt = \dfrac{\pi}{2}dx$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$① = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-(1-\cos^2 t)(\cos t)'\}\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{0-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\} = \frac{4}{3\pi}$$

(4) $r>0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ なる r，θ を用いて

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

である．また，

$$12(1+\sqrt{3}i) = 24\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

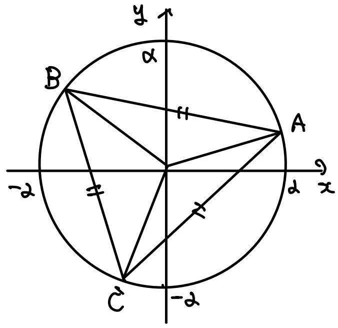
であることから，$z^3 = 12(1+\sqrt{3}i)$ のとき k を整数として

$$r^3 = 24,\quad 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$r = 2\cdot 3^{\frac{1}{3}},\quad \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $k=0, 1, 2$ で

$\theta = \dfrac{\pi}{9},\ \dfrac{7}{9}\pi,\ \dfrac{13}{9}\pi$ である．



$\alpha = 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ とおいて，求める面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot \alpha^2 \sin\frac{2}{3}\pi \cdot 3$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot 3 = 3^{\frac{13}{6}}$$

よって $s = \frac{13}{6}$ である。

(5) $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2}$ より

$$a\sqrt{2}+b = 2\sqrt{2}\,(c\sqrt{2}+d)$$

$$a\sqrt{2}+b = 2d\sqrt{2} + 4c$$

$\sqrt{2}$ が無理数であることから

$$a = 2d,\quad b = 4c \quad \cdots ①$$

となる。これを $ad + bc = 18$ に代入して

$$2d^2 + 4c^2 = 18 \quad \therefore\ 2c^2 + d^2 = 9$$

c, d は整数であり $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ より $c \geqq 0$, $d \geqq 0$ であることも合わせると，

$$(c, d) = (0, 3),\ (2, 1)$$

よって $(a, b, c, d) = (6, 0, 0, 3),\ (2, 8, 2, 1)$ である。

[2]

(1) 袋の中の白玉が 3, 2, 1 個である状態をそれぞれ A, B, C とおく。

$n+1$ 回後に状態 A になるのは，n 回後に状態 A（確率 a_n）で，さらに赤玉を取り出す（確率 $\frac{3}{6}$）ことであるから，

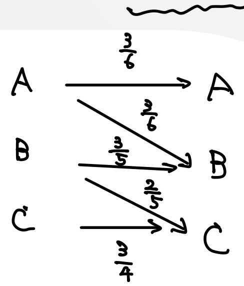
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \cdots ①$$

$n+1$ 回後に状態 B になるのは，n 回後に状態 A（確率 a_n）で，さらに白玉を取り出す（確率 $\frac{3}{6}$）か，n 回後に状態 B（確率 b_n）で，さらに赤玉を取り出す（確率 $\frac{3}{5}$）かのいずれかであるから

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{5}b_n \quad \cdots ②$$

$n+1$ 回後に状態 C になるのは，n 回後に状態 B（確率 b_n）で，さらに白玉を取り出す（確率 $\frac{2}{5}$）か，n 回後に状態 C（確率 c_n）で，さらに赤玉を取り出す（確率 $\frac{3}{4}$）かのいずれかであるから

$$c_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + \frac{3}{4}c_n \quad \cdots ③$$



$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0$ である。①より

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 = \underline{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

このとき②より

$$b_{n+1} = \frac{3}{5} b_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots ④$$

この式で b_n を $c\left(\frac{1}{2}\right)^n$ としてみると

$$c\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{5}c\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$(c-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{6}{5}c\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$c = -5$ とおくと，

$$b_{n+1} + 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{5}\left\{b_n + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

これより 数列 $\left\{b_n + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ は

等比数列で，

$$b_n + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n (b_0 + 5)$$

$$b_n = \underline{5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

このとき③より

$$c_{n+1} = \frac{3}{4} c_n + 2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

c_n を $d\left(\frac{3}{5}\right)^n + e\left(\frac{1}{2}\right)^n$ としてみると

$$d\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + e\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{3}{4}d\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{3}{4}e\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$-\frac{3}{20}d\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{1}{4}e\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$d = -\frac{40}{3},\ e = 8$ とおくと

$$c_{n+1} + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{3}{4}\left\{c_n + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

これより 数列 $\left\{c_n + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

は等比数列で

$$c_n + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n\left(c_0 + \frac{40}{3} - 8\right)$$

$$c_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{16}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 8\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$= \underline{4\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

(2) $X_n \geqq k$ となるのは，1〜k 回目に常に赤玉を取り出し続けるときのみであるから，その確率は

$$P(X_n \geqq k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

である。これより $k = 0, 1, \cdots, n-1$ のとき

$$P(X_n = k) = P(X_n \geqq k) - P(X_n \geqq k+1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

また，$P(X_n = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

よって，Y_n の期待値 $E(Y_n)$ は

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} + 1 = \underline{\frac{1}{2}n + 1}$$

また，$E(Y_n^2)$ について

$$E(Y_n^2) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1} + 2^n$$

$$= \frac{1}{2}(2^n - 1) + 2^n$$

$$= 2^{n-1} - \frac{1}{2} + 2^n = 3\cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2}$$

となるから，Y_n の分散 $V(Y_n)$ は

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - \{E(Y_n)\}^2$$

$$= 3\cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}n + 1\right)^2$$

$$= \underline{3\cdot 2^{n-1} - \frac{n^2}{4} - n - \frac{3}{2}}$$

[3]

(1) (i) $P(x) = x(3x^2 - 9x + 7)$

$$P(Q(x)) = (2x^2+1)\{3(2x^2+1)^2 - 9(2x^2+1) + 7\}$$
$$= (2x^2+1)(12x^4 - 6x^2 + 1)$$
$$= \underline{24x^6 - 4x^2 + 1}$$

(ii) $H(x)$ について，$b_n \neq 0$ のとき $H(x)$ は必ず異なる $m+1$ 個以上の値をとる．これより，$G(H(x)) = 0$ が恒等式であるとき，$G(x) = 0$ 自体が恒等式ということになるから，$G(x)$ の係数はすべて 0 である．

(2) (i) $g(x) + h(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$

$$= g(1) = \underline{a}$$

である．$g(x) = a - h(x)$ より

$$g(h(x)) = \{h(x)\}^3 + b(a - h(x))^2 + c\,h(x) + d$$
$$g(h(x)) = (h(x))^3 + b(h(x))^2 + (-2ab + c)h(x) + (a^2b + d)$$

(1)(ii)も合わせて，これが恒等式より

$$g(x) = x^3 + bx^2 + (-2ab + c)x + (a^2b + d)$$

よって次数は $\underline{3}$ である．また，$g(1) = a$ より

$$1 + b - 2ab + c + a^2b + d = a \cdots ①$$

さらに，$g'(x) = f(x)$ より

$$f(x) = 3x^2 + 2bx + (-2ab + c)$$

であり，$f(1) = 2(1-a)$ より

$$3 + 2b + (-2ab + c) = 2(1-a) \cdots ②$$

また，$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とおいて，

$$g(x) = \left[F(t)\right]_0^x = F(x) - F(0)$$

となるが，この定数項は

$$g(0) = F(0) - F(0) = 0$$

であるから，

$$a^2b + d = 0 \cdots ③$$

①〜③を解いて

$$b = \underline{-3a}, \quad c = \underline{-6a^2 + 4a - 1}$$
$$d = \underline{3a^3}$$

(ii) $g(x) = x^3 - 3ax^2 + (4a-1)x$

$$g'(x) = 3x^2 - 6ax + (4a-1)$$

ここで，$g'(x) = 0$ を解いて，

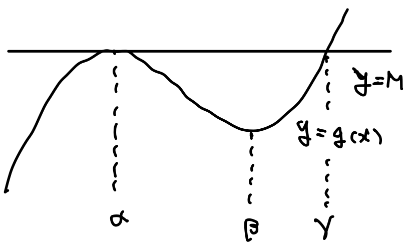
$$x = \frac{3a \pm \sqrt{(3a)^2 - 3(4a-1)}}{3}$$
$$= a \pm \frac{1}{3}\sqrt{3(a-1)(3a-1)}$$

となる．$g(x)$ が極値をもつ条件は，$g'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつことで，その条件は

$$(a-1)(3a-1) > 0 \quad \therefore \underline{a < \frac{1}{3},\ 1 < a}$$

$x = a - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(a-1)(3a-1)}$ の前後で $g'(x)$ の符号は正から負に変わるから、極大値をとる。

$g'(x)=0$ の解を $x=\alpha, \beta$ $(\alpha<\beta)$ とし、$g(x)=M$ の $x=\alpha$ 以外の解を γ とする。



$g(x)=0$ で解と係数の関係より、

$$\alpha+\alpha+\gamma=3a$$

$$\gamma=3a-2\alpha$$

$$= a+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(a-1)(3a-1)}$$

(iii) $x=a$ における接線は

$$y=g'(a)(x-a)+g(a)$$

$$g(a)=-2a^3+4a^2-a$$

$$g'(a)=-3a^2+4a-1$$

であることから、

$$y=(-3a^2+4a-1)(x-a)+(-2a^3+4a^2-a)$$

$$y=(-3a^2+4a-1)x+a^3$$

$$F(a)=\int_0^a \left\{g(x)-g'(a)(x-a)-g(a)-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx$$

$$=\int_0^a \left\{(x-a)^3-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx$$

みやすさのため、$u=\frac{(x-a)^2}{2}$ とおくと、

$du=(x-a)\,dx$ で、

x	$0 \to a$
u	$\frac{a^2}{2} \to 0$

$$F(a)=\int_{\frac{a^2}{2}}^{0}(2u-2)e^{-u}du$$

$$=\left[-2ue^{-u}\right]_{\frac{a^2}{2}}^{0}=a^2e^{-\frac{a^2}{2}}$$

さらに、$A=a^2$ とおくと、$F(a)=Ae^{-\frac{A}{2}}$ であり、$I(A)=Ae^{-\frac{A}{2}}$ とすると

$$I'(A)=e^{-A}-\frac{A}{2}e^{-A}$$

$$=\frac{2-A}{2}e^{-A}$$

A	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$I'(A)$		$+$	0	$-$
$I(A)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより $f(a)$ $(=I(A))$ の最大値は $I(2)=2e^{-1}=\frac{2}{e}$ である。

[4]

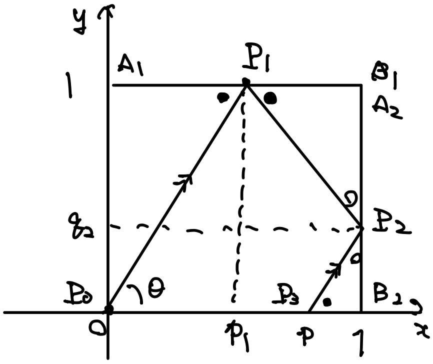
(1) 図のように θ をとると，$\tan\theta = \frac{1}{p_1}$ である．$A_2P_2 = (1-p_1)\tan\theta$，

$B_3P_3 = (1-p)\tan\theta$ であるから

$$(1-p_1)\tan\theta + (1-p)\tan\theta = 1$$

$$(1-p_1) + (1-p) = p_1 \quad \therefore p_1 = 1-\frac{p}{2}$$

$$q_2 = (1-p)\tan\theta = \frac{2(1-p)}{2-p}$$



・$0 < p\tan\theta \le 1$ のとき，

P_4 の座標は $(0, p\tan\theta)$ である．

ここで，$p\tan\theta \le 1$ を解く

$$\frac{p}{p_1} \le 1$$

$$p \le 1-\frac{p}{2} \quad \therefore p \le \frac{2}{3}$$

これより，$0 < p \le \frac{2}{3}$ のとき，P_4 の座標は $\left(0, \frac{2p}{2-p}\right)$ である．

・$p\tan\theta \ge 1$，すなわち $\frac{2}{3} \le p < 1$ のとき，P_4 の x 座標は

$$p - \frac{1}{\tan\theta} = p - p_1 = \frac{3}{2}p - 1$$

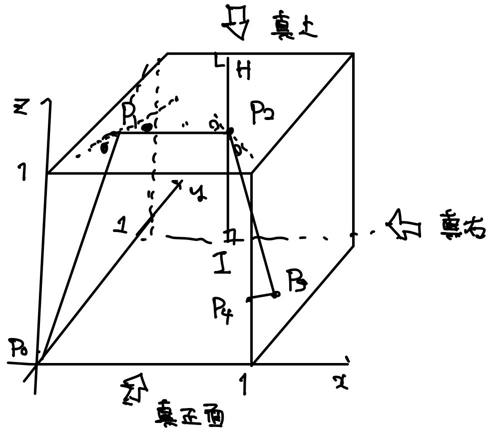
であるから，P_4 の座標は $\left(\frac{3}{2}p-1, 1\right)$

(2) (i) 直線 Q_0Q_1 上の点は $t(a_1, b_1, 1)$ とパラメータ表示でき，$y=1$ との交点は

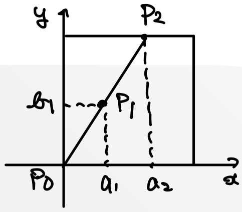
$$tb_1 = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{b_1}$$

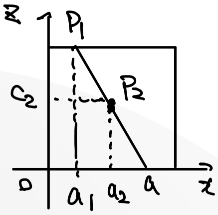
であるから，$\left(\frac{a_1}{b_1}, 1, \frac{1}{b_1}\right)$ である．

これより，$a_2 = \frac{a_1}{b_1}$ である．



真上から見ると，折れ線$P_0P_1P_2$は直線に見える．





(ii) 真正面から見ると折れ線 $P_1P_2P_3$ は直線に見える．図のように H, I をとると．

$$HP_2 = \frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{1}{b_1} - 1 \quad \cdots ①$$

$$IP_2 = \frac{a-a_2}{a-a_1} \quad \cdots ②$$

$$HP_2 : IP_2 = 1-b_1 : 1-b \quad \cdots ③$$

であり，①,③より $IP_2 = \frac{1-b}{b_1}$ とわかる．

$HP_2 + IP_2 = 1$ であるから、

$$\frac{1-b_1}{b_1} + \frac{1-b}{b_1} = 1$$

$$2 - b_1 - b = b_1 \quad \therefore b_1 = 1-\frac{b}{2}$$

④、⑤へ代入して

$$\frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{b}{2-b} \quad \cdots ④'$$

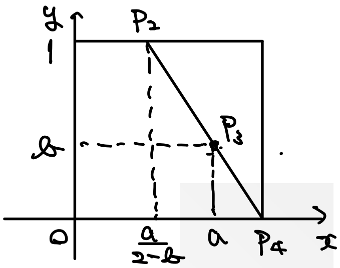
$$\frac{a-a_2}{a-a_1} = \frac{2(1-b)}{2-b} \quad \cdots ⑤'$$

これを解いて

$$a_1 = \frac{a}{2},\quad a_2 = \frac{a}{2-b}$$

$$c_2 = I_1H = \frac{2(1-b)}{2-b}$$

真上から見ると折れ線$P_2P_3P_4$は直線に見える。



P_4が $x=1$ かつ $y=0$ 上にくる条件は

$$1-\frac{a}{2-b} = \frac{1-a}{b}$$

$$b^2 + (2a-3)b + (2-2a) = 0$$

$$\{b-(2-2a)\}(b-1) = 0$$

$$b = 2-2a,\ 1$$

$b \neq 1$ より $b = 2-2a$ である。

このときのP_4のz座標は

$$\frac{2(1-b)}{2-b} \cdot \frac{1-a}{a-\frac{a}{2-b}} = \frac{2(1-a)}{a}$$

である。これより、これが0以上1以下となる条件は

$$\frac{2(1-a)}{a} \leqq 1 \quad \therefore 0 < a \leqq \frac{2}{3}$$

であり、このときP_4の座標は

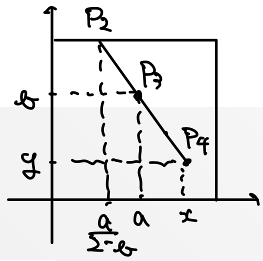
$$\left(1,\ 0,\ \frac{2(1-a)}{a}\right)$$

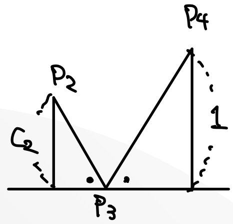
である。また、

$\frac{2}{3} \leqq a < 1$ のとき、$P_4(x, y, 1)$とすると

$$a-\frac{a}{2-b} : x-a = c_2 : 1$$

$$1-b : b-y = c_2 : 1$$





これらを解いて

$$x-a = \frac{a}{2} \quad \therefore x = \frac{3}{2}a$$

$$2(b-y) = 1-b \quad \therefore y = \frac{3}{2}b-1$$

よってP_4の座標は $\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{3}{2}b-1,\ 1\right)$ である。