

昭和医科大学・後期

1. (1) a, b は実数とする. 3次方程式 $4x^3 + ax^2 + 5x + b = 0$ の1つの解が $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ であるとし, 残りの解を β, γ とする.
- (i) 実数 a, b の値を求めよ.
- (ii) $(\beta\gamma)^{2025}$ の値を求めよ.
- (2) a, b は実数とする. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ について, $y = f(x)$ のグラフは $x = \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) で x 軸と交わる. また, $f(x)$ は $x = 1$ に変曲点をもち, $\alpha + \beta = 0$ を満たす. 次の各問いに答えよ.
- (i) α, β, γ の値を求めよ.
- (ii) 実数 a, b の値を求めよ.
- (iii) $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$ を求めよ.
2. (1) $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 3, \tan \gamma = 4$ とする. このとき $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$ の値を求めよ.
- (2) $\triangle ABC$ の3つの角 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C とする. A, B, C について次の等式が成り立つとき, この三角形はどのような形をしているか句読点を含め50文字以内で数式を用いずに簡潔に説明せよ.
- $$\sin A \sin B \cos B - \sin A \cos B \sin C - \sin B \sin C + 1 = \cos^2 C$$
- (3) 次の定積分の値を求めよ.
- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x)(\sin 2x)(\tan x) dx$$
- (4) 次の問いに答えよ.
- (i) $f(x) = \sin x + \cos x$ について, $y = \{f(x)\}^2$ の値域を不等式で示せ.
- (ii) a は実数の定数とする. 次の方程式を満たす実数 θ が存在するための a の範囲を不等式で表せ.
- $$1 + 2\sin\theta \cos\theta - 2a \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 6a = 0$$
3. $a > 0$ とする. $x \geq 0$ における関数 $f(x) = e^{\sqrt{ax}}$ と, 座標平面の曲線 $C: y = f(x)$ について, 次の問いに答えよ. ただし, 答えは結果のみを解答欄に記入せよ.
- (1) C 上の点 $P\left(\frac{1}{a}, f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ. また, P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ.
- (2) 曲線 C , 直線 $y = 1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ. また, $a > 0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ.
4. ジョーカーを除く52枚1組のトランプ(スペード, ハート, クラブ, ダイヤの4種の絵柄の1つと, 1から13の番号の1つが, それぞれ重複なく割り当てられた合計52枚のカード)がある. この中から無作為に n 枚のカードを選ぶ. 2枚だけが同じ数字で残りがすべて異なる数字である確率を $p(n)$ とする. ただし $n \geq 3$ とする. 次の各問いに答えよ. ただし, 答えは結果のみを解答欄に記入せよ.
- (1) $p(3)$ を求めよ.
- (2) $\frac{p(n)}{p(n+1)}$ を求めよ. ただし $3 \leq n \leq 13$ とする.
- (3) $p(3)$ と $p(4)$ はどちらが大きいか. 適切な不等号を解答欄に記入せよ.
- (4) $p(13)$ と $p(14)$ はどちらが大きいか. 適切な不等号を解答欄に記入せよ.
- (5) $p(n)$ が最大となるときの n を求めよ.