関西医科大学

医学部　後期　数　学

（制限時間　９０分）

解答速報

医学部専門予備校 D組

解答・解説

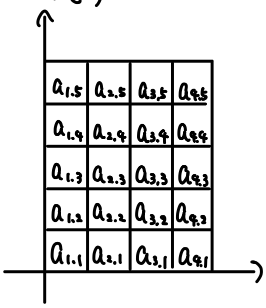
[1]

(1) 右に4回，下に5回移動したとするときの道順は $\frac{9!}{4!5!}=126$ 通り

(2) 20個の長方形を以下のように名付ける。

$\frac{p-1}{4}\le x\le \frac{p}{4}$ かつ $\frac{q-1}{5}\le y\le \frac{q}{5}$ （p,q:自然数で $1\le p\le 4$, $1\le q\le 5$）

つまり



のように名付ける

このとき $S=\frac{2}{5}$ となるとき，8個の長方形が含まれるので，

① $a_{1,5}$ を含むとき，残り3つの長方形の決め方は
$(a_{2,3},a_{2,2},a_{2,1}),(a_{2,2},a_{2,1},a_{3,1})$
$(a_{2,1},a_{3,1},a_{4,1})$

② $a_{1,4}$ を含み，$a_{1,5}$ を含まないとき，残り4つの長方形の決め方は
$(a_{2,4},a_{2,3},a_{2,2},a_{2,1}),(a_{2,3},a_{2,2},a_{2,1},a_{3,1})$
$(a_{2,2},a_{2,1},a_{3,2},a_{3,1}),(a_{2,2},a_{2,1},a_{3,1},a_{4,1})$

③ $a_{1,3}$ を含み，$a_{1,4}$ を含まないとき，残り5つの長方形の決め方は
$(a_{2,3},a_{2,2},a_{2,1},a_{3,2},a_{3,1})$ $(a_{2,3},a_{2,2},a_{2,1},a_{3,1},a_{4,1})$
$(a_{2,2},a_{2,1},a_{3,2},a_{3,1},a_{4,1})$

④ $a_{1,2}$ を含み，$a_{1,3}$ を含まないとき残り6つの長方形の決め方は
$(a_{2,2},a_{2,1},a_{3,2},a_{3,1},a_{4,2},a_{4,1})$

⑤ $a_{1,1}$ を含み，$a_{1,2}$ を含まないとき $S\le\frac{1}{5}$ より不適。

よって 11通り

(3) $S=\frac{3}{4}$ となると15個の長方形が含まれる。

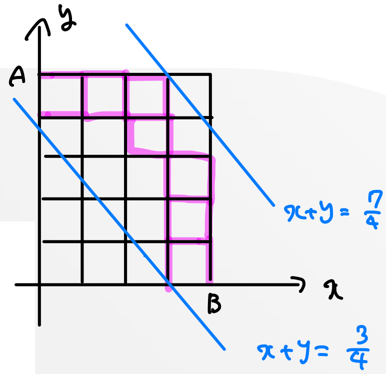
同様に考えて

① $a_{1,5}$ を含むとき 5通り

② $a_{1,4}$ を含み，$a_{1,5}$ を含まないとき 1通り

よって 6通り

(4) (3)のとき点の通る経路は以下の色付き部であるから，



上図より

$\frac{3}{4}\le x+y\le \frac{7}{4}$

[2]

(1) $f'(x)=4x^3-12x-4a$

$y=f(x)$ が 3つの極値をもつとき.

$f'(x)$ は3回符号変化する。

つまり $f'(x)=0$ は3つの異なる実数解をもつ。

$f'(x)=g(x)$ とおくと.

$g'(x)=12x^2-12$

$=12(x+1)(x-1)$ より

$g'(x)$ は $x=\pm1$ の前後で符号変化することから

$g(x)$ は $x=\pm1$ で極値をとる.

よって求める条件は

$g(1)\times g(-1)=f'(1)\times f'(-1)<0$

つまり

$(-8-4a)\times(8-4a)<0$

$(a+2)(a-2)<0$ より $\underline{-2<a<2}$

(2) α,β,γ は $f'(x)=0$ の3解より

$4x^3-12x-4a=4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ …①

となる。よって $x=1$ を代入して

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=\underline{-2-a}$

(3) ①に $x=-1$ を代入して

$(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)=2-a$

よって

$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=\underline{a-2}$

(4) $(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)$

$=(1+\alpha)(1-\alpha)(1+\beta)(1-\beta)(1-\gamma)(1+\gamma)$

$=\{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\}\{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\}$

$=(a-2)(-2-a)=4-a^2$

(1)より $-2<a<2$ より $0<4-a^2\leqq4$

よって $\underline{0<(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)\leqq4}$

[3]

(1) $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$

$=\left\{\dfrac{2(n+1)}{n}a_{n+1}-\dfrac{n+2}{n}a_n\right\}-a_{n+1}$

$=\dfrac{n+2}{n}a_{n+1}-\dfrac{n+2}{n}a_n$

$=\dfrac{n+2}{n}(a_{n+1}-a_n)$

$=\underline{\dfrac{n+2}{n}b_n}$

(2) (1)の両辺を $(n+1)(n+2)$ でわると.

$\dfrac{b_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{b_n}{n(n+1)}$ より

数列 $\left\{\dfrac{b_n}{n(n+1)}\right\}$ は定数列なので

$\dfrac{b_n}{n(n+1)}=\dfrac{b_1}{2}$

よって $b_1=1$ から $\underline{b_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)}$

(3) (2)より

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ より

$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2}k(k+1)$

$=1+\dfrac{1}{6}(n-1)n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}(n^3-n+6)$

これは $n=1$ のときも成立.

よって $\underline{a_n=\dfrac{1}{6}(n^3-n+6)}$

[4]

$$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$=\left(\frac{2\cos\theta+\cos2\theta}{3},\ \frac{2\sin\theta+\sin2\theta}{3}\right)$$

よって

$$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OD}$$
$$=\left(\frac{2\cos\theta+\cos2\theta+1}{3},\ \frac{2\sin\theta+\sin2\theta}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{2\cos\theta(1+\cos\theta)}{3},\ \frac{2\sin\theta(1+\cos\theta)}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}(1+\cos\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$=\frac{2}{3}(1+\cos\theta)\overrightarrow{OA}$$ より示せた。

(2) (1)より

$$|\overrightarrow{DN}|=\left|\frac{2}{3}(1+\cos\theta)\overrightarrow{OA}\right|$$

$0<\theta<\pi$ より $-1<\cos\theta<1$ であり

$|\overrightarrow{OA}|=1$ から

$$|\overrightarrow{DN}|=\frac{2}{3}(1+\cos\theta)$$

(3) $N(x,y)$ とおくと

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}(2\cos\theta+\cos2\theta)\\ y=\frac{1}{3}(2\sin\theta+\sin2\theta)\end{cases}$$

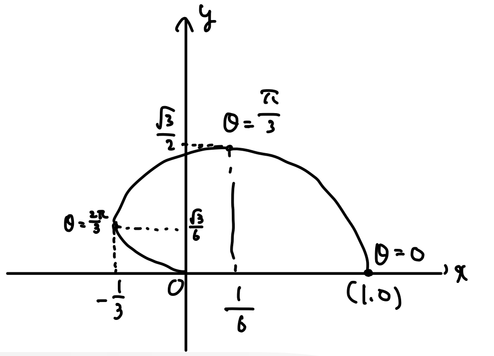
より

$$\begin{cases}\frac{dx}{d\theta}=-\frac{2}{3}(\sin\theta+\sin2\theta)=-\frac{4}{3}\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{dy}{d\theta}=\frac{2}{3}(\cos\theta+\cos2\theta)=\frac{4}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}\end{cases}$$

よって増減表は以下のようになる

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$	/
$\frac{dy}{d\theta}$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	↖	$\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$	↙	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt3}{6}\end{pmatrix}$	↘	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

したがってCの概形は



(4) (3)より点Nにおける接線の方向ベクトルは

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta}\right)=\frac{4}{3}\left(-\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{4}{3}\cos\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{3}{2}\theta,\ \cos\frac{3}{2}\theta\right)$$
$(=\vec{p}$ とする。)

であり、

直線ABの方向ベクトルは、

$$\overrightarrow{AB}=(\cos2\theta-\cos\theta,\ \sin2\theta-\sin\theta)$$
$$=\left(-2\sin\frac{3}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2},\ 2\cos\frac{3}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{3}{2}\theta,\ \cos\frac{3}{2}\theta\right)$$
$(=\vec{q}$ とする。)

このとき、$\vec{p}\parallel\vec{q}$ であり、

Nは直線AB上の点であることから

直線ABとCは接することは示された。