2025年度　私大医学部入試

解答速報

2025年3月1日　実施

昭和大学

医学部　II期　**数学**

（制限時間　英語・数学または国語140分）

医学部専門予備校 D組

解答・解説

(1-1)

$\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}$, γを実数解とする

解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\dfrac{a}{4} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \dfrac{5}{4} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{b}{4} \end{cases}$$ より

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+\gamma = -\dfrac{a}{4} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{4}\gamma = -\dfrac{b}{4} \end{cases}$$

よって

$(\gamma, a, b) = (2, -10, -2)$

より $\underline{(a, b) = (-10, -2)}$

(1-2)

$\beta\gamma = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

より

$$(\beta\gamma)^{2025} = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{2025}$$

$$= \cos\left(-\frac{2025}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2025}{3}\pi\right)$$

$$= \cos(-\pi)+i\sin(-\pi)$$

$$= \underline{-1}$$

(2) (2-1)(2-2)

$f'(x) = 3x^2+2ax+b$

$f''(x) = 6x+2a$

$f(x)$は$x=1$で変曲点をもつことから$f''(1) = 6+2a = 0$より$a=-3$.

（このとき確かに$x=1$の前後で$f''(x)$は符号変化する）

$a=-3$のとき、

$f(x) = x^3-3x^2+bx+3$となり

$f(x)=0$の3解がα, β, γより

解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 3 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -3 \end{cases}$$

かつ$\alpha+\beta=0$を用いると、

$\alpha<\beta<\gamma$に注意して

$(\alpha, \beta, \gamma, b) = (-1, 1, 3, -1)$

以上より

$\underline{(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 1, 3)}$

$\underline{(a, b) = (-3, -1)}$

〔2－3〕

3次関数 $f(x)$ は変曲点において点対称であり，変曲点が $(1,0)$ であるから

$-\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx$ が成り立つので

$\int_{-1}^{3} f(x)dx = 0.$

[2]

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$

$= -1$

よって

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

$= \tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$

$= \dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \dfrac{3}{5}$

(2) ABとACの長さが等しい二等辺三角形もしくは，角Aが直角の直角三角形

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^3 x-3\cos x)\cdot 2\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-4\sin^2 x)\cdot\sin^2 x\cos x dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x-4\sin^4 x)\cos x dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{4}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right) = -\frac{14}{15}$

（$\tan\frac{\pi}{2}$ は定義されないので不適切な可能性有）

(4) (4-1)

$y=(\sin x+\cos x)^2$

$=2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$ より

$0\leqq y\leqq 2$

(4-2)

$1+2\sin\theta\cos\theta-\sqrt{2}a(\sin\theta+\cos\theta)-6a=0$

$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと.

$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$ であり.

$t=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ から $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$.

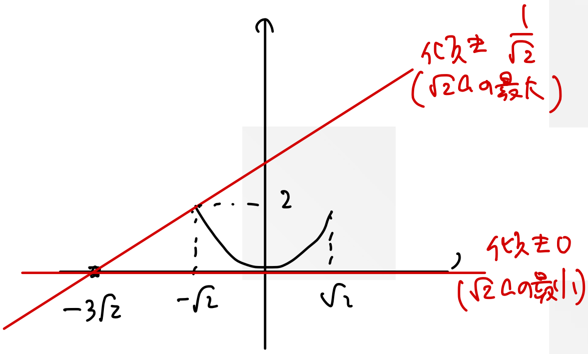
$1+(t^2-1)-\sqrt{2}at-6a=0$.

$t^2=\sqrt{2}a(t+3\sqrt{2})$

よって $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ において

曲線 $y=t^2$ と直線 $y=\sqrt{2}a(t+3\sqrt{2})$

が共有点をもつ範囲を考える



よって $0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$

[3]

(1) $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ より

$f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax}}e^{\sqrt{ax}}$ だから

点 $P(\frac{1}{a}, e)$ における接線の方程式は

$y-e=\frac{1}{2}ae(x-\frac{1}{a})$

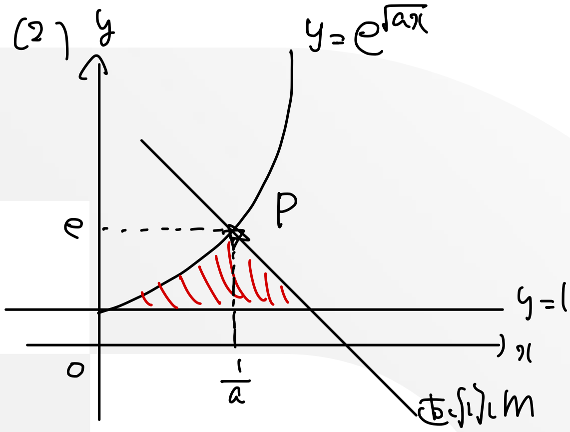
$y=\frac{1}{2}aex+\frac{1}{2}e$

また, 直線 m の方程式は

$y-e=-\frac{2}{ae}(x-\frac{1}{a})$

$y=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e$

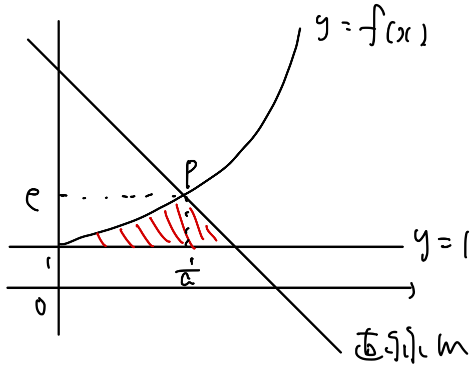
(2)



直線mと $y=1$ の共有点の x座標は.

$-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e=1$ より

$x=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}ae(e-1)$



y軸方向の積分で考えると.

$$S(a)=\left\{\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}ae(e-1)\right)\right\}\times(e-1)\times\frac{1}{2}$$
$$-\int_1^e x\,dy$$
$$=\left\{\frac{2}{a}+\frac{1}{2}ae(e-1)\right\}\times\frac{e-1}{2}$$
$$-\frac{1}{a}\int_1^e (\log y)^2\,dy \quad \cdots ⊛$$

ここで

$$\int_1^e (\log y)^2\,dy$$
$$=\Big[y(\log y)^2\Big]_1^e-\int_1^e 2\log y\,dy$$
$$=e-2\Big[y\log y-y\Big]_1^e$$
$$=e-2$$

より⊛に代入して.

$$S(a)=\left\{\frac{2}{a}+\frac{1}{2}ae(e-1)\right\}\times\frac{e-1}{2}$$
$$-\frac{e-2}{a}$$
$$=\frac{e-1}{a}+\frac{ae(e-1)^2}{4}-\frac{e-2}{a}$$
$$=\frac{ae(e-1)^2}{4}+\frac{1}{a}$$

$a>0$より相加平均.相乗平均の不等式から

$$S(a)\geqq 2\sqrt{\frac{ae(e-1)^2}{4}\times\frac{1}{a}}$$
$$=(e-1)\sqrt{e}$$

等号成立は $\frac{ae(e-1)^2}{4}=\frac{1}{a}$ より

$$a=\frac{2}{(e-1)\sqrt{e}} \text{ のとき.}$$

よって $a=\frac{2}{(e-1)\sqrt{e}}$ のとき

最小値 $(e-1)\sqrt{e}$

[4]

(1) 2枚出る数字のえらび方が $_{13}C_1$ 通りあり，絵柄のえらび方が $_4C_2$ 通り．また，それ以外の数字が書かれたカードが48枚あるので

$$P(3) = \frac{_{13}C_1 \times {_4C_2} \times {_{48}C_1}}{_{52}C_3}$$

$$= \frac{13 \times 6 \times 48}{\frac{52 \times 51 \times 50}{6}} = \frac{72}{425}$$

(2) 2枚出る数字のえらび方は $_{13}C_1 \times {_4C_2}$ 通り．
それ以外の $n-2$ 枚のカードのえらび方は数字と絵柄を考えて
$_{12}C_{n-2} \times {_4C_1} \cdot 4^{n-2}$ より

$$P(n) = \frac{_{13}C_1 \times {_4C_2} \times {_{12}C_{n-2}} \times {_4C_1} \times 4^{n-2}}{_{52}C_n}$$

$$= \frac{13! \times 6 \times 12! \times 4 \times n! \times (52-n)! \times 4^{n-2}}{52!\,12! \times (n-2)!\,(14-n)!}$$

$$= \frac{24 \times 13! \times n!\,(52-n)! \times 4^{n-2}}{52!\,(n-2)!\,(14-n)!}$$

よって

$$\frac{P(n)}{P(n+1)} = \frac{(n-1)!\,(13-n)!\ \ n!\,(52-n)!}{4(n+1)!\,(51-n)!\,(n-2)!\,(14-n)!}$$

$$= \frac{(n-1) \times (52-n)}{4(n+1) \times (14-n)}$$

(3) (2)において $n=3$ を代入すると

$$\frac{P(3)}{P(4)} = \frac{2 \times 49}{4 \times 4 \times 11} < 1 \text{ より } P(3) < P(4)$$

(4) (2)において $n=13$ を代入すると

$$\frac{P(13)}{P(14)} = \frac{12 \times 39}{4 \times 14 \times 1} > 1 \text{ より } P(13) > P(14)$$

(5) $\dfrac{P(n)}{P(n+1)} = \dfrac{(n-1)(52-n)}{4(n+1)(14-n)} < 1$ をとくと

$$-n^2 + 53n - 52 < 4(-n^2 + 13n + 14)$$

$$3n^2 + n - 108 < 0.$$

$$n(3n+1) < 108$$

$3 \leqq n \leqq 13$ から．
これをみたす n は $n = 3, 4, 5$

よって．

$$P(3) < P(4) < P(5) < P(6) > P(7) > P(8) > \cdots$$

より $n = 6$