２０２５年３月１０日　実施

大阪医科薬科大学

後期　数 学

（制限時間　９０分）

解答・解説

［1］

(1) $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)$ より定義域は $x \neq 0$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

よって増減表は

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-3	↘	／	↘	3	↗

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ （複号同順）

$\lim_{x\to\pm 0} f(x)=\pm\infty$ （複号同順）

また $\lim_{x\to\pm\infty}\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}=0$

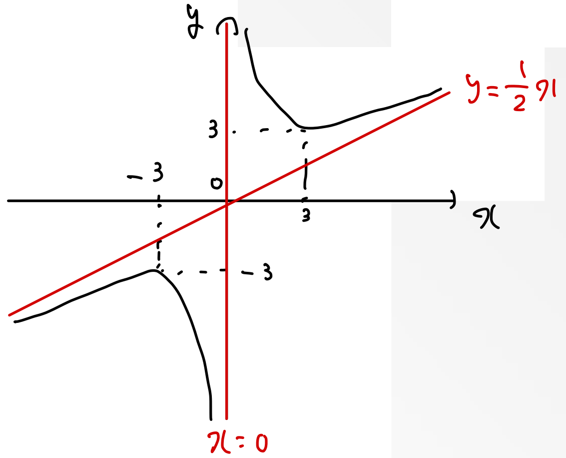
したがって

極大値は $x=-3$ のとき -3

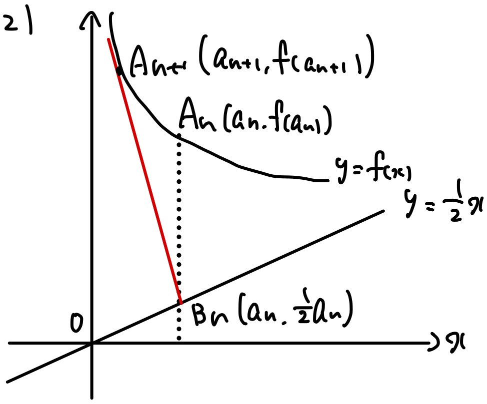
極小値は $x=3$ のとき 3

漸近線は $x=0,\ y=\frac{1}{2}x$

よってグラフは下図



(2)



$y=f(x)$ 上の点 $A_{n+1}(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}\left(a_{n+1}+\frac{9}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{a_{n+1}^2}\right)(x-a_{n+1})$$

$$y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{a_{n+1}^2}\right)x+\frac{9}{a_{n+1}}$$

これが $B_n(a_n, \frac{1}{2}a_n)$ を通るので

$$\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{a_{n+1}^2}\right)a_n+\frac{9}{a_{n+1}}$$

$$\frac{9a_n}{2a_{n+1}^2}=\frac{9}{a_{n+1}}$$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ となり $a_1=1$ より $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $\log_2 a_{2n}=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=-(2n-1)$

$\log_2 a_{2n+2}=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=-(2n+1)$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

[2]

(1) $z^7=1$ より

$$z^{567}+\frac{1}{z^{567}}=(z^7)^{81}+\frac{1}{(z^7)^{81}}=2$$

(2) $(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$

$=z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10}$

$=(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)+3$ ($z^7=1$より) …①

ここで $z\neq 1$ より

$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{1-z^7}{1-z}=0$ …②

①.②から

$(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)=-1+3=2$

(3) $z^6=\overline{z}$, $z^5=\overline{z^2}$, $z^4=\overline{z^3}$ より

$$\mathrm{Re}(z+z^2+z^3)=\frac{z+z^2+z^3+\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^3}}{2}$$

$$=\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$ (②より)

[3]

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ($x\geqq 2$)とおくと

$f'(x)=x(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}$ ($x>2$)より

$y=f(x)$上の点$(p, \sqrt{p^2-4})$ $(p>2)$における接線の方程式は

$y-\sqrt{p^2-4}=\frac{p}{\sqrt{p^2-4}}(x-p)$ …① と表せ、

点(1, 0)を通るとき、

$0=\frac{p}{\sqrt{p^2-4}}(1-p)+\sqrt{p^2-4}$

$0=p(1-p)+p^2-4$

$p=4$

①より

$\ell: y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ であり、

接点であり $(4, 2\sqrt{3})$

(2) $x=e^t+e^{-t}$ を $y=\sqrt{x^2-4}$ に代入して、

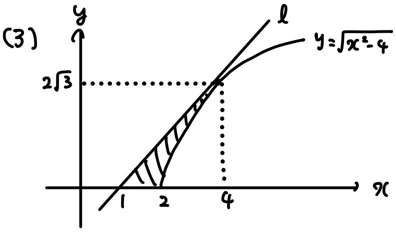
$y=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2-4}$

$=\sqrt{(e^t-e^{-t})^2}$

$=e^t-e^{-t}$ ($t\geqq 0$より)

よって共有点のy座標は e^t-e^{-t}

(3)



求める面積は上図の斜線部より

$S=3\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx$

$=3\sqrt{3}-\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx$

ここで

$\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx$ において

$x=e^t+e^{-t}$とおくと

$dx=(e^t-e^{-t})dt$ であり

x	$2\ \to\ 4$
t	$0\ \to\ \log(2+\sqrt{3})$

より

$\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx=\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}(e^t-e^{-t})\cdot(e^t-e^{-t})dt$

$=\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}(e^{2t}-2+e^{-2t})dt$

$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\log(2+\sqrt{3})}$

$=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{2}-2\log(2+\sqrt{3})-\frac{1}{2(2+\sqrt{3})^2}$

$=4\sqrt{3}-2\log(2+\sqrt{3})$

よって

$S=3\sqrt{3}-\{4\sqrt{3}-2\log(2+\sqrt{3})\}$

$=2\log(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$

[4]

(1) 3回とも同じ数を取り出すときの余事象より

$$1-\left(\frac{10}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\right)=\frac{99}{100}$$

(2) ① 出る数字が1種類のとき

3回とも同じ数字を取り出すときなので 10通り

② 出る数字が2種類のとき

XとYの数字の決め方は

$(X,Y)=(k+1,k)$ (kは$1\leqq k\leqq 9$をみたす自然数)

もしくは

$(X,Y)=(p+2,p)$ (pは$1\leqq p\leqq 8$をみたす自然数)

であり、それらの数字の出る順番は $2^3-2=6$通り

であるから、

$17\times 6=102$通り

③ 出る数字が3種類のとき

出る3種類の目は連続する3整数であるから8通り。

それらの数字の出る順番は$3!=6$通りであるから

$8\times 6=48$通り

以上より

$$\frac{10+102+48}{10^3}=\frac{4}{25}$$

(3) $X\geqq 8$となる確率は全て7以下が出ることの

余事象なので $1-\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{657}{1000}$

次に

$X\geqq 8$かつ$Y\leqq 2$となる確率を求める

①出る数が2種類のとき

Xは3通り、Yは2通りの決め方があり、

それらの数字の出る順番は $2^3-2=6$通りより

$3\times 2\times 6=36$通り

② 出る数が3種類のとき

$(X,Y)=(10,1)$のとき、他の数字のえらび方は8通り

$(X,Y)=(10,2)(9,1)$のとき他の数字のえらび方は7通り

$(X,Y)=(9,2)(8,1)$のとき他の数字のえらび方は6通り

$(X,Y)=(8,2)$のとき、他の数字のえらび方は5通り

より $8+7\times 2+6\times 2+5=39$通り

あり数字の出る順番は各々に対し、6通りずつより

$39\times 6=234$通り

よって $X\geqq 8$かつ$Y\leqq 2$となる確率は

$$\frac{36+234}{10^3}=\frac{270}{1000}$$

したがって求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{270}{1000}}{\frac{657}{1000}}=\frac{30}{73}$$